数列

1. 知 $S(n)+S(k)-S(nk)$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-\sum_{t=k+1}^{nk}\frac{1}{t}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{tk-(k-1)}-\frac{1}{tk-(k-2)}-\cdots-\frac{1}{tk}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{k-1}{tk(tk-(k-1))}+\frac{k-2}{tk(tk-(k-2))}+\cdots+\frac{1}{tk(tk-1)}\right)$$

$$>\frac{1}{2}-\sum_{t=2}^{n}\left(\frac{k-1}{t(t-1)k^2}+\frac{k-2}{t(t-1)k^2}+\cdots+\frac{1}{t(t-1)k^2}\right)$$

$$>\frac{1}{2}-\sum_{t=2}^{n}\frac{1}{2t(t-1)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}>0,$$ 即证.

2. 令 $a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$, $k=2,3,\cdots,n$.

便可得：$a_k=2^{k-2}a_1$, $k=2,3,\cdots,n$.

此时 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}$ 取到 $\frac{n}{2}$.

下证：$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\leq\frac{n}{2}$.

设 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $k=1,2,\cdots,n$. $S_0=0$.

则 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{S_k-S_{k-1}}{a_{k+1}}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{a_{k+1}}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{S_{k-1}}{a_{k+1}}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{a_{k+1}}-\sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{S_k}{a_{k+2}}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n-2}S_k\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)+\frac{S_{n-1}}{a_n}$ (阿贝尔变换)

$\leq\sum\limits_{k=1}^{n-2}a_{k+1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)+1$ (注意不能使用 $a_{k+2}\geq a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$, 方向反了)

$=n-1+\frac{a_1}{a_2}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}$

$\leq n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}$, 即有：$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}\leq\frac{n}{2}$.

当且仅当 $S_k=a_{k+1}$, 即：$a_k=2^{k-2}a_1$, $k=2,3,\cdots,n$ 时取到

3. $a(n)=a(a(n-1))+a(n-a(n-1))$

归纳证明：$1\le a(n)\le n$.

$n=1,2$ 时显然.

设对 $n-1$ 成立, $n\ge 3$, 对 n.

$a(n)=a(a(n-1))+a(n-a(n-1))\le a(n-1)+(n-a(n-1))=n$.

由归纳假设. $1\le n-a(n-1)\le n-1$.

首先证明一引理：对任意 $n\in N^*$, $a(n+1)-a(n)=0$ 或 1.

注意到 $a(1)=a(2)=1$, $a(3)=2$, $n=1,2$ 时成立.

设对不大于 $n-1$ $(n\ge 3)$ 成立, 对 n.

$a(n+1)=a(a(n))+a(n+1-a(n))$

$a(n)=a(a(n-1))+a(n-a(n-1))$

若 $a(n)=a(n-1)$, 知 $a(a(n))=a(a(n-1))$

$a(n+1)-a(n)=a(n+1-a(n-1))-a(n-a(n-1))$

由 $1\le n-a(n-1)\le n-1$, 归纳假设, 知 $a(n+1)-a(n)=0$ 或 1.

若 $a(n)=a(n-1)+1$, 知 $n+1-a(n)=n-a(n-1)$

故 $a(n+1)-a(n)=a(a(n-1)+1)-a(a(n-1))=0$ 或 1.

注意 $1\le a(n-1)\le n-1$. 得证.

反证. 若不成立, 设 M 是满足 $a(2M)>2a(M)$ 最小正整数.

知 $M>1$. 有: $a(2M-2)\le 2a(M-1)$.

若 $a(M)=a(M-1)+1$, 则

$a(2M)>2a(M)\ge 2a(M-1)+1\ge a(2M-2)+2\ge a(2M)$, 矛盾.

故 $a(M)=a(M-1)$. 记为 t.

$a(M)=a(a(M-1))+a(M-a(M-1))$, 有: $t=a(t)+a(M-t)$.

由 $a(2M-2)\le 2t$, $a(2M)>2t$, 由引理.

$a(2M-1)=2t$ 或 $2t+1$.

若 $a(2M-1)=2t$. 则
$$\begin{aligned}a(2M)&=a(a(2M-1))+a(2M-a(2M-1))\\&=a(2t)+a(2M-2t)\\&\le 2a(t)+2a(M-t)=2t,\end{aligned}$$
矛盾.

若 $a(2M-1)=2t+1$, 知 $a(2M-2)=2t$.
$$\begin{aligned}a(2M-1)&=a(a(2M-2))+a(2M-1-a(2M-2))\\&=a(2t)+a(2M-1-2t)\\&\le 2a(t)+a(2M-2t)\le 2t,\end{aligned}$$
矛盾

4. 提示：先证 $f(a_1+a_2+\cdots+a_n)\le 2n\max\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$.

再 $f^n(a+b)=f((a+b)^n)=f\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}\right)$

$\le 2(n+1)\max\limits_{0\le i\le n}\{f(C_n^i a^i b^{n-i})\}$ 进行估算.

结合(1)(2)等结论，想到与 $f(a+b)$ 乘积均有关的等式：

$f^n(a+b)=(f(a+b))^n$

推广(2)，对正整数 k 不难归纳证明：$f(a_1+a_2+\cdots+a_{2^k})$

$\le 2^k\max\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_{2^k})\}$

下面对 k 归纳证明：$n<2^k$ 时，

$f(a_1+a_2+\cdots+a_n)\le 2n\max\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$.

$k=1$ 时显然。设对小于 k 成立，对 $k+1$，

考虑 $2^{k-1}<n<2^k$ 情形。

知 $f(a_1+a_2+\cdots+a_n)\le 2\max\{f(a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k-1}}),f(a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_n)\}$

$\le 2\max\{2^{k-1}f(a_1),2^{k-1}f(a_2),\cdots,2^{k-1}f(a_{2^{k-1}}),$

(2^k 时结论)

$2(n-2^{k-1})f(a_{2^{k-1}+1}),2(n-2^{k-1})f(a_{2^{k-1}+1}),\cdots,$

$2(n-2^{k-1})f(a_n)\}$

$\le\max\{2^k,4(n-2^{k-1})\}\max\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$

$\le 2n\max\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$，得证.

从而对 $n\in N^*$，$f(a_1+a_2+\cdots+a_n)\le 2n\max\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$.

$f(n)\le 2nf(1)$. 对 $n\in N^*$，

$f^n(a+b)=f((a+b)^n)=f\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}\right)$

$\le 2(n+1)\max\limits_{0\le i\le n}\{f(C_n^i a^i b^{n-i})\}$

$\le 2(n+1)\sum_{i=0}^{n}f(C_n^i)f(a^i)f(b^{n-i})$

$\le 4(n+1)f(1)\sum_{i=0}^{n}C_n^i f(a)^i f(b)^{n-i}$

$=4(n+1)f(1)(f(a)+f(b))^n$

故 $f(a+b)\le\sqrt[n]{4(n+1)f(1)}\,(f(a)+f(b))$

令 $n\to+\infty$，得 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$.　　下附时间10:25.

扫描全能王 创建

5.（可得数列前若干项：1 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 4 5 5 6 6 ⋯）

不难算出 $a_1=a_2=a_3=a_4=1$. $a_5=a_6=a_7=2$.

对 k 归纳证明：$a_{2^k+k+1+2M-1}=a_{2^k+k+2+2M-1}=2^{k-1}+M$,

$M=1,2,\cdots,2^{k-1}-1$. $a_{2^{k+1}+k}=a_{2^{k+1}+k+1}=a_{2^{k+1}+k+2}=2^k$.

$k=1$ 时由 $a_5=a_6=a_7=2$ 知。

设命题对不大于 k 成立. 对 $k+1$. 由归纳假设.

$a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}+k+2}=2\sum_{i=1}^{2^k} i+\sum_{i=1}^{k}2^i+1=2^{2k}+3\times2^k$.

对 $M=1,2,\cdots,2^k-1$ 归纳证明：$a_{2^{k+1}+k+2+2M-1}$

$=a_{2^{k+1}+k+2+2M}=2^k+M$, $M=1,2,\cdots,2^k-1,2^k$

$M=1$ 时. 由 $a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}+k+2}=2^{2k}+3\times2^k$,

$(2^k+1)^2<2^{2k}+3\times2^k<(2^k+2)^2$ 知 $a_{2^{k+1}+k+3}=2^k+1$

$a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}+k+3}=2^{2k}+4\times2^k+1$

$(2^k+1)^2<2^{2k}+4\times2^k+1<(2^k+2)^2$, 知 $a_{2^{k+1}+k+4}=2^k+1$.

设命题对不大于 M 成立. $1\le M\le2^k-1$.

对 $M+1$ 归纳假设,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}+k+2+2M}=2^{2k}+3\times2^k+2((2^k+1)+(2^k+2)+\cdots+(2^k+M))$$
$$=(2^k+M+1)^2+2^k-M-1$$

故 $a_{2^{k+1}+k+2+2M+1}=2^k+M+1$

$a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}+k+2+2M+1}=(2^k+M+1)^2+2^{k+1}$

故 $a_{2^{k+1}+k+2+2M+2}=2^k+M+1$. 得证.

此时 $a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+2}+k+2}=2^{2k}+3\times2^k+2((2^k+1)+(2^k+2)+\cdots+(2^k+2^k))$
$$=2^{2k+2}+2^{k+2}$$
$$=(2^{k+1}+1)^2-1$$

故 $a_{2^{k+1}+k+3}=2^{k+1}$, 得证.

从而所有出现超过2次的项数为 2^k, $k\ge0$.

6. 变形.

$$((a_n-a_{n-1})-(a_n-a_{n-2}))^2=(a_n-a_{n-1})^2-2(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})+(a_n-a_{n-2})^2$$

即：$(a_{n-1}-a_{n-2})^2=(a_n-a_{n-1})^2-2(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})+(a_n-a_{n-2})^2$

类似地，$(b_{n-1}-b_{n-2})^2=(b_n-b_{n-1})^2-2(b_n-b_{n-1})(b_n-b_{n-2})+(b_n-b_{n-2})^2$

求和，得：$(a_{n-1}-a_{n-2})^2+(b_{n-1}-b_{n-2})^2$

$$=(a_n-a_{n-1})^2+(b_n-b_{n-1})^2+(a_n-a_{n-2})^2+(b_n-b_{n-2})^2$$

$$\geq(a_n-a_{n-1})^2+(b_n-b_{n-1})^2$$

知 $(a_n-a_{n-1})^2+(b_n-b_{n-1})^2$ 为非严格单调递减的非负整数数列.

$\exists N$, $n\geq N$ 时, $(a_n-a_{n-1})^2+(b_n-b_{n-1})^2$ 为定值 M.

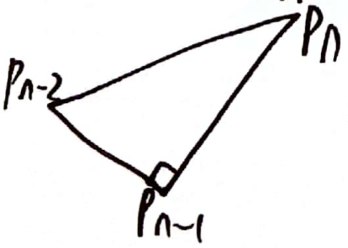
$n\geq N+1$ 时, $M=M+(a_n-a_{n-2})^2+(b_n-b_{n-2})^2$

$a_{n-2}=a_n$, $b_{n-2}=b_n$.

故 $a_{N+1001}=a_{N+1}$, 得证.

另证：设 $P_n(a_n,b_n)$. 知：$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}:(a_n-a_{n-1},b_n-b_{n-1})$

$\overrightarrow{P_{n-2}P_n}:(a_n-a_{n-2},b_n-b_{n-2})$



$\overrightarrow{P_{n-2}P_n}\cdot\overrightarrow{P_{n-1}P_n}=0$.

勾股定理. $|P_{n-1}P_{n-2}|^2=|P_nP_{n-1}|^2+|P_nP_{n-2}|^2$

$\geq|P_nP_{n-1}|^2$

构成非严格单调递减非负整数数列.

后面类似.

7. S_n表示对于数a_i不同选择，x_n可以取到的所有可能的集合.

例如：$S_3=\{\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{2},4\}$

由$a_{n+1}=-1$时，$x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}$，$a_{n+1}=1$时$x_{n+1}=x_n+1$.

知$S_{n+1}=\{\frac{1}{x+1},x+1 \mid x\in S_n\}$

不难知$|S_{n+1}|=2|S_n|$，故$|S_n|=2^n$.

设S_n中元素从小到大为：$a_1^{(n)}<a_2^{(n)}<\cdots<a_{2^n}^{(n)}$，

知$S_{n+1}=\{\frac{1}{a_{2^n}^{(n)}+1},\frac{1}{a_{2^n-1}^{(n)}+1},\cdots,\frac{1}{a_1^{(n)}+1},a_1^{(n)}+1,\cdots,a_{2^n}^{(n)}+1\}$.

且$\frac{1}{a_{2^n}^{(n)}+1}<\frac{1}{a_{2^n-1}^{(n)}+1}<\cdots<\frac{1}{a_1^{(n)}+1}<a_1^{(n)}+1<\cdots<a_{2^n}^{(n)}+1$.

故$a_i^{(n+1)}=\frac{1}{a_{2^n+1-i}^{(n)}+1}$，$i=1,2,\cdots,2^n$ ①

$a_i \cancel{^{(n+1)}=\frac{1}{a_{2^n+1-i}^{(n)}+1}, i=2^n+1,2^n+2,\cdots,2^{n+1}}$

$a_i^{(n+1)}=a_{i-2^n}^{(n)}+1$，$i=2^n+1,2^n+2,\cdots,2^{n+1}$

由此知$a_{2^{n+1}+1-i}^{(n+1)}=a_{2^n+1-i}^{(n)}+1=\frac{1}{a_i^{(n+1)}}$，$i=1,2,\cdots,2^n$.

即有：$a_{2^n+1-i}^{(n)}=\frac{1}{a_i^{(n)}}$ $i=1,2,\cdots,2^{n-1},2^{n-1}+1,\cdots,2^n$. ②

由①,②式，有：$a_i^{(n+1)}=\frac{a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}+1}$，$i=1,2,\cdots,2^n$. ③

间隔：$\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$

下面我们来证明：$n\ge 2$时，$a_{i+1}^{(n)}-a_i^{(n)}\le\frac{1}{2n-1}$，$i=1,2,\cdots,2^n-1$.

$n=2$ 易验.

设对 n 成立, 对 $n+1$.

$i\le 2^{n-1}-1$ 时, 由③式, $a_i^{(n+1)}=\dfrac{a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}+1}$, 归纳可证 $a_i^{(n)}\ge\dfrac{1}{n+1}$.

再由③式知

$$a_{i+1}^{(n+1)}-a_i^{(n+1)}=\frac{a_{i+1}^{(n)}-a_i^{(n)}}{(1+a_{i+1}^{(n)})(1+a_i^{(n)})}$$

$$\le\frac{\frac{1}{2n-1}}{(1+\frac{1}{n+1})^2}\le\frac{\frac{1}{2n-1}}{1+\frac{2}{n+1}}\le\frac{1}{2n+1}.$$

$i=2^{n-1}$ 时, 知 $a_1^{(n-1)}=\frac{1}{n}$.

由①知 $a_{2^{n-1}}^{(n)}=\dfrac{1}{a_1^{(n-1)}+1}=\dfrac{n}{n+1}$,

类似地, 由②③知 $a_{2^{n-1}+1}^{(n)}=\dfrac{n+1}{n}$,

$a_{2^{n-1}}^{(n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$, $a_{2^{n-1}+1}^{(n+1)}=\dfrac{n+1}{2n+1}$.

从而 $a_{2^{n-1}+1}^{(n+1)}-a_{2^{n-1}}^{(n+1)}=\underline{\dfrac{1}{2n+1}}$, 即证.

→最后情形.

$2^{n-1}+1\le i\le 2^n-1$ 时.

不难得 $a_i^{(n+1)}=1-a_{2^n+1-i}^{(n+1)}$,

$a_{i+1}^{(n+1)}=1-a_{2^n-i}^{(n+1)}$

故 $a_{i+1}^{(n+1)}-a_i^{(n+1)}=a_{2^n+1-i}^{(n+1)}-a_{2^n-i}^{(n)}\le\dfrac{1}{2n+1}$.

即证.

回到原题, 设 $b_i=a_i^{(101)}$, $i=1,2,\cdots,2^{101}$.

$b_j\le x<b_{j+1}$ 时, $|x-b_j|+|x-b_{j+1}|=b_{j+1}-b_j\le\frac{1}{201}$,

故 $|x-b_j|$, $|x-b_{j+1}|$ 中有一个不大于 $\frac{1}{402}$. 即证.

8. $\lambda<\frac{1}{2}$时，取$\alpha>1$使$\alpha+\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\lambda}$，

令$a_n=\frac{1}{\alpha+\frac{1}{\alpha}}$，$b_n=\alpha^n$ 知$\{b_n\}$无界。

下证：$\lambda=\frac{1}{2}$时满足题设 $a_0>\frac{1}{2}$。

（注意b_n+b_{n+2}符号不确定，比如$b_n=\cos\frac{n\pi}{3}$，不能$b_{n+1}\geq\lambda(b_n+b_{n+2})$）

又 $b_{n+1}(b_{n+2}-b_n)=a_n(b_{n+2}^2-b_n^2)$

思路：从0叠加到$n-2$：$\sum_{i=0}^{n-2}a_i(b_{i+2}^2-b_i^2)=b_{n-1}b_n-b_0b_1$

又 $\sum_{i=0}^{n-2}(b_{i+2}^2-b_i^2)=b_{n-1}^2+b_n^2-b_0^2-b_1^2$

由以上两式，$\sum_{i=0}^{n-2}(2a_i-1)(b_{i+2}^2-b_i^2)=(b_0-b_1)^2-(b_{n-1}-b_n)^2$

$$(2a_{n-2}-1)b_n^2+(2a_{n-3}-1)b_{n-1}^2\underbrace{-2(a_{n-2}-a_{n-4})b_{n-2}^2}_{\text{不好处理}}$$

再整变形。

思路中实际对$(2a_n-1)(b_{n+2}^2-b_n^2)=(b_n-b_{n+1})^2-(b_{n+1}-b_{n+2})^2$

求和。

除过去

故 $b_{n+2}^2-b_n^2=\frac{1}{2a_n-1}\left((b_n-b_{n+1})^2-(b_{n+1}-b_{n+2})^2\right)$

从0到$n-2$叠加得：

$$\begin{aligned}b_n^2+b_{n-1}^2-b_0^2-b_1^2&=-\frac{1}{2a_{n-2}-1}(b_{n-1}-b_n)^2\cancel{+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{2a_{i+1}-1}}\\&+\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2a_i-1}-\frac{1}{2a_{i-1}-1}\right)(b_i-b_{i+1})^2\\&+\frac{1}{2a_0-1}(b_0-b_1)^2\\&\leq\frac{1}{2a_0-1}(b_0-b_1)^2\end{aligned}$$

知 $b_n^2\leq b_0^2+b_1^2+\frac{1}{2a_0-1}(b_0-b_1)^2$，即证。

n元不等式

1. 令 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1$，$a_n=x$.

得：$\dfrac{n-1}{n-2+x}+\dfrac{kx}{n-1}\geq\dfrac{n-1}{n-2}$

$$\frac{kx}{n-1}\geq\frac{(n-1)x}{(n-2)(n-2+x)}，即：k\geq\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-2+x)}.$$

令 $x\to 0$，$k\geq\dfrac{(n-1)^2}{(n-2)(n-2)}=\left(\dfrac{n-1}{n-2}\right)^2$

下证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{S-a_i}+\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n-1}{n-2}$

上式等价于：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S}{S-a_i}+\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{(n-1)^2}{n-2}$

由柯西不等式，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{S}{S-a_i}\geq S\cdot\frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(S-a_i)}=\frac{(n-1)^2S}{(n-2)S+a_n}$

注意柯西不等式常见变形

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i}$$

只需证：$\dfrac{S}{(n-2)S+a_n}+\dfrac{1}{(n-2)^2}\cdot\dfrac{a_n}{S-a_n}\geq\dfrac{1}{n-2}$

即：$\dfrac{1}{(n-2)^2}\cdot\dfrac{a_n}{S-a_n}\geq\dfrac{a_n}{(n-2)((n-2)S+a_n)}$，

不难发现成立.

扫描全能王 创建

2. 若 $(a,b)\notin T$，知 $\sum_{(i,j)} x_i x_j$ 形如 $x_a(x_0+\cdots)+x_b(x_0+\cdots)$
$+x_0x_0\cdots$

考虑任一组满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，x_i 非负的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

若 $(a,b)\notin T$，知
$$\sum_{(i,j)\in T} x_ix_j = x_a \sum_{\substack{(a,j)\in T\\ \text{或}(j,a)\in T}} x_j + x_b \sum_{\substack{(b,j)\in T\\ \text{或}(j,b)\in T}} x_j + \sum_{\substack{(i,j)\in T\\ i,j\text{都不为}a,b}} x_ix_j$$

若 x_a 系数较小，令 x_a 变为 0，x_b 变为 x_a+x_b 原式不减.

若 x_a 系数不小于 x_b 系数，x_a 变为 x_a+x_b，x_b 变为 0. 原式不减

这么调整下去 每次调整 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中 0 数目至少加 1.

有限次调整后结束. 此时 $\forall (a,b)\notin T$，x_a 与 x_b 中至少1个为 0.

设 $\{i \mid x_i\neq 0\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}$，$i_1<i_2<\cdots<i_s$.

知 $i_1\mid i_2,\ i_2\mid i_3,\ \cdots,\ i_{s-1}\mid i_s$.

$i_2\geq 2i_1,\ i_3\geq 2i_2,\ \cdots,\ i_s\geq 2i_{s-1}$

故 $i_s\geq 2^{s-1}$，$s-1\leq \log_2 n$. $s\leq [\log_2 n]+1$

$$\sum_{(i,j)\in T} x_ix_j = \sum_{1\leq j_1<j_2\leq s} x_{i_{j_1}}x_{i_{j_2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{s} x_{i_j}\right)^2-\sum_{j=1}^{s} x_{i_j}^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} x_{i_j}^2$$
$$\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2s}\ (\text{柯西不等式})$$
$$=\frac{[\log_2 n]}{2([\log_2 n]+1)}$$

故不超过 $\frac{[\log_2 n]}{2([\log_2 n]+1)}$，设 $k=[\log_2 n]$.

取 $x_1=x_2=\cdots=x_{2^k}=\frac{1}{k+1}$，其余为 0 即可.

扫描全能王 创建

3. 试出 $n=5$ 满足题意.

构造方式很多.

比如：$a_1=2x$. $a_2=a_3=1$. $a_4=a_5=-(x+1)$

知：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$

考虑3次, 5次的符号. 令 $x=1.5$.

再微调至 $a_1=2.9$. $a_2=a_3=1$. $a_4=a_5=-2.4$.

使 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5>0$.

再比如：$a_1=8$ $a_2=4$ $a_3=3$ $a_4=-7$ $a_5=-7$.

下面考虑 $n=4$. 若 a_1, a_2, a_3, a_4 满足,

不妨设 $a_1\geq a_2\geq a_3\geq a_4$, 若其中恰1个正数.

知 $0\geq a_2\geq a_3\geq a_4$. 则 $a_1>-(a_2+a_3+a_4)$.

$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3>-(a_2+a_3+a_4)^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3>0$, 矛盾.

恰3个正数. 则 $|a_4|^3>|a_1|^3+|a_2|^3+|a_3|^3$.

$|a_4|>|a_1|, |a_2|, |a_3|$.

不难推出 $|a_4|^5>|a_1|^5+|a_2|^5+|a_3|^5$, 矛盾.

故恰2个正数

此时：$a_1+a_2>|a_3|+|a_4|$

$a_1^3+a_2^3<|a_3|^3+|a_4|^3$

$a_1^5+a_2^5>|a_3|^5+|a_4|^5$

设 $x_i=|a_i|$, 知 $x_1\geq x_2$, $x_4\geq x_3$. 先给 x_1, x_2, x_3, x_4 排序.

知 $x_1^2-x_1x_2+x_2^2<x_3^2-x_3x_4+x_4^2$

及 $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2>x_3^2+2x_3x_4+x_4^2$

即：$x_1-x_2<x_4-x_3$

又 $x_1+x_2>x_3+x_4$

故 $x_2>x_3$. 又 $x_1^3+x_2^3<x_3^3+x_4^3$ 知 $x_4>x_1$

故 $x_4>x_1\geq x_2>x_3$

最大元素为 x_4 让我们猜测 $x_1^5+x_2^5<x_3^5+x_4^5$,

只需证：$\dfrac{x_4^5-x_1^5}{x_4^3-x_1^3}>\dfrac{x_2^5-x_3^5}{x_2^3-x_3^3}$.

注意到对于 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$, $x\in(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ 单调递增.

$f'(y)>\frac{f(y)-f(z)}{y-z}>f'(z)$, 其中 $y>z>0$.

故 $\frac{x_4^5-x_1^5}{x_4^3-x_1^3}>\frac{5}{3}x_1^2\geq\frac{5}{3}x_2^2>\frac{x_2^5-x_3^5}{x_2^3-x_3^3}$, 矛盾.

$\Downarrow$

$\frac{5}{3}(x_1^3)^{\frac{2}{3}}$

故 $n=4$ 时不存在.

$n\leq 3$ 时, 补 0 变成 $n=4$ 情形, 可知 n 最小值为 5.

下课休息到4:00.

4. 考虑 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_ic_i}{b_ic_i+c_ia_i+a_ib_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_ic_i}{a_i(b_i+c_i)+b_ic_i}$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\cdot\frac{b_ic_i}{b_i+c_i}}{a_i+\frac{b_ic_i}{b_i+c_i}}$ 形如 $\sum\frac{a_ix_i}{a_i+x_i}$.

$\frac{b_ic_i}{b_i+c_i}\to x_i$

想到引理.

引理: $a_i,b_i>0$. 则 $\cancel{\sum\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\cdot(\sum a_i+\sum}$

$$\sum\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\cdot\sum(a_i+b_i)\le\sum a_i\cdot\sum b_i.$$

引理的证明: 知 $\sum\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}=\sum(a_i-\frac{a_i^2}{a_i+b_i})=\sum a_i-\sum\frac{a_i^2}{a_i+b_i}$.

而由柯西不等式. $\sum\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\ge\frac{(\sum a_i)^2}{\sum(a_i+b_i)}$,

从而 $\sum\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\cdot\sum(a_i+b_i)\le\left(\sum a_i-\frac{(\sum a_i)^2}{\sum(a_i+b_i)}\right)\sum(a_i+b_i)$

$=\sum a_i\cdot(\sum a_i+\sum b_i)-(\sum a_i)^2$

$=\sum a_i\cdot\sum b_i$, 得证.

想办法2次均用引理放缩.

由引理, $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_ic_i}{b_ic_i+c_ia_i+a_ib_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{a_i+x_i}\le\frac{\sum a_i\cdot\sum x_i}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+x_i)}$,

其中 $x_i=\frac{b_ic_i}{b_i+c_i}$.

又 $\sum x_i\le\frac{\sum b_i\cdot\sum c_i}{\sum(b_i+c_i)}$.

从而 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_ic_i}{b_ic_i+c_ia_i+a_ib_i}\le\frac{\sum a_i\cdot\frac{\sum b_i\cdot\sum c_i}{\sum b_i+\sum c_i}}{\sum a_i+\frac{\sum b_i\cdot\sum c_i}{\sum b_i\cdot\sum c_i}}=\frac{\sum a_i\cdot\sum b_i\cdot\sum c_i}{\sum a_i\cdot\sum b_i+\sum b_i\cdot\sum c_i+\sum c_i\cdot\sum a_i}$ ①

又 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i+b_ic_i}{a_i+b_i+c_i}$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i(a_i+c_i)}{b_i+(a_i+c_i)}\le\frac{\sum b_i\cdot\sum(a_i+c_i)}{\sum b_i+\sum(a_i+c_i)}=\frac{\sum a_i\cdot\sum b_i+\sum b_i\cdot\sum c_i}{\sum a_i+\sum b_i+\sum c_i}$, 由引理.

类似地,

$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i+c_ia_i}{a_i+b_i+c_i}\le\frac{\sum b_i\cdot\sum c_i+\sum c_i\cdot\sum a_i}{\sum a_i+\sum b_i+\sum c_i}$,

$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_ia_i+a_ib_i}{a_i+b_i+c_i}\le\frac{\sum c_i\cdot\sum a_i+\sum a_i\cdot\sum b_i}{\sum a_i+\sum b_i+\sum c_i}$.

三式相加得: $\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i+c_ia_i+a_ib_i}{a_i+b_i+c_i}\le\frac{\sum b_i\cdot\sum c_i+\sum c_i\cdot\sum a_i+\sum a_i\cdot\sum b_i}{\sum a_i+\sum b_i+\sum c_i}$.

与①式再乘即证.

5. $P(x)=(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)$, 故

$$|P(z_0)|^2 = P(z_0)\overline{P(z_0)}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}(z_0-z_j)(\overline{z_0}-\overline{z_j})$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\underbrace{(|z_0|^2-z_0\overline{z_j}-z_j\overline{z_0}+|z_j|^2)}_{\Rightarrow \text{正实数}}$$

$$\le\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(|z_0|^2-z_0\overline{z_j}-z_j\overline{z_0}+|z_j|^2)\right)^n$$

而 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(|z_0|^2-z_0\overline{z_j}-z_j\overline{z_0}+|z_j|^2)$

$$=|z_0|^2-z_0\overline{\alpha}-\overline{z_0}\alpha+\beta^2$$

$$=(z_0-\alpha)(\overline{z_0}-\overline{\alpha})+\beta^2-|\alpha|^2$$

$$=|z_0-\alpha|^2+\beta^2-|\alpha|^2<1.$$ 得证.

6. 估计 $\sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}}-\sqrt{a_i}$

知 $\sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}}-\sqrt{a_i}=\dfrac{\frac{a_i^2+1}{2}-a_i}{\sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}}+\sqrt{a_i}}=\frac{1}{2}\dfrac{(a_i-1)^2}{\sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}}+\sqrt{a_i}}$

由柯西不等式, $\sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}}+\sqrt{a_i}\le\sqrt{2\left(\frac{a_i^2+1}{2}+a_i\right)}=a_i+1$,

故 $\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}}-\sqrt{a_i}\right)\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i-1)^2}{a_i+1}$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-3)+\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{a_i+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i-\frac{1}{2}n$$

这里想直接证明 $\sum_{i=1}^{n}(2-\sqrt{a_i})^2\ge n$ 十分困难, 注意 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\le n$ 并不成立.

只需证: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\ge2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}-\frac{3}{2}n$.

注意 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}=\frac{n}{2}$. 从 $\frac{a_i}{a_i+1}$ 中可以凑出 a_i:

$$\frac{2a_i}{a_i+1}+\frac{a_i+1}{2}\ge2\sqrt{a_i}$$

从1加到 n 得: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{3}{2}n\ge2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}$, 得证.

7. 猜最后，下标大的项为等差数列. $a_n=0$.

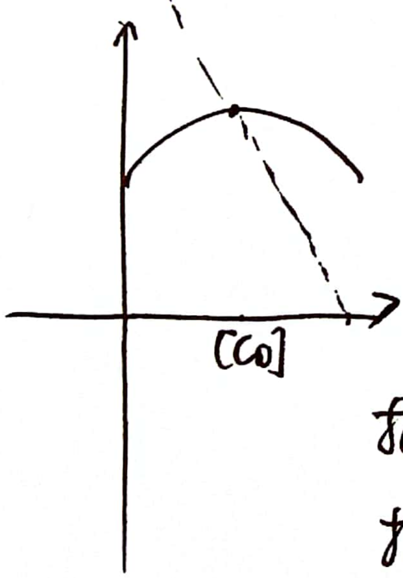
$a_i=n-i$. 则 $C=\dfrac{\sum_{i=0}^{n} i(n-i)^2}{\sum_{i=0}^{n}(n-i)^2}=\dfrac{n^2-n}{4n+2}$.

下证其最大. 设 $c_0=\dfrac{n^2-n}{4n+2}$. 我们证明: $\sum_{i=1}^{n}(i-c_0)a_i^2\geq 0$.

知 $0\leq i<j\leq n$ 时, $\dfrac{a_j-a_i}{j-i}\geq\dfrac{a_n-a_i}{n-i}$

$a_j\geq\dfrac{n-j}{n-i}a_i+\dfrac{j-i}{n-i}a_n\geq\dfrac{n-j}{n-i}a_i$

$\dfrac{a_j}{n-j}\geq\dfrac{a_i}{n-i}$ 固定 i.



将 a_i 与等差数列 b_i 相比较.

$b_n=0$. $b[c_0]=a[c_0]$ 即: $b_i=\dfrac{n-i}{n-[c_0]}a[c_0]$

$i\leq[c_0]$ 时, $\dfrac{a_i}{n-i}\leq\dfrac{a[c_0]}{n-[c_0]}=\dfrac{b[c_0]}{n-[c_0]}=\dfrac{b_i}{n-i}$,

故 $a_i\leq b_i$.

$[c_0]<i<n$ 时, $\dfrac{a_i}{n-i}\geq\dfrac{a[c_0]}{n-[c_0]}=\dfrac{b[c_0]}{n-[c_0]}=\dfrac{b_i}{n-i}$.

故 $a_i\geq b_i$. 不等式在 $i=n$ 时成立

故总有: $(i-c_0)a_i^2\geq(i-c_0)b_i^2$

求和即得: $\sum_{i=0}^{n}(i-c_0)a_i^2\geq\sum_{i=0}^{n}(i-c_0)b_i^2=0$.