8. $x_n^3x_{n+2}$

一方面，$x_n=\frac{3}{4}$，$x_{n+2}=\frac{1}{4}$，其他各数均为0时取到$\frac{27}{256}$

另一方面，对n归纳证明：对一切不小于2的正整数n，

及所有非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$，

$$(x_n^2+x_{n-1}x_{n+1}+x_{n-2}x_{n+3}+\cdots+x_1x_{2n-1})(x_{n+1}^2+x_nx_{n+2}+\cdots+x_2x_{2n})$$
$$+(x_{n-1}^2x_{n+2}^2+x_{n-2}^2x_{n+3}^2+\cdots+x_1^2x_{2n}^2)\le\frac{27}{256}(x_1+x_2+\cdots+x_{2n})^4$$

设命题对n成立，对n+1，我们证：对任意非负实数

$x_1,x_2,\cdots,x_{2n+2}$，$(x_{n+1}^2+x_nx_{n+2}+\cdots+x_1x_{2n+1})(x_{n+2}^2+x_{n+1}x_{n+3}+\cdots+x_2x_{2n+2})$
$$+(x_n^2x_{n+3}^2+x_{n-1}^2x_{n+4}^2+\cdots+x_1^2x_{2n+2}^2)\le\frac{27}{256}(x_1+x_2+\cdots+x_{2n+2})^4$$

右式减去左式关于x_1导数为：

$$\frac{27}{64}(x_1+x_2+\cdots+x_{2n+2})^3-x_{2n+1}(x_{n+2}^2+x_{n+1}x_{n+3}+\cdots+x_2x_{2n+2})-2x_1x_{2n+2}^2$$
$$\ge\frac{27}{64}(3x_{2n+1}^2(x_1+x_2+\cdots+x_{2n}+x_{2n+2})+3x_{2n+1}(x_1+x_2+\cdots+x_{2n}+x_{2n+2})^2$$
$$+(x_1+x_2+\cdots+x_{2n}+x_{2n+2})^3)-x_{2n+1}(x_{n+2}^2+x_{n+1}x_{n+3}+\cdots+x_2x_{2n+2})-2x_1x_{2n+2}^2$$
$$\ge\frac{27}{64}(3x_{2n+1}^2x_3+3x_{2n+1}(x_{n+2}^2+x_{n+1}x_{n+3}+\cdots+x_4x_{2n}+x_2x_{2n+2}))$$
$$+\frac{27}{64}(x_1+x_{2n+2})^3-x_{2n+1}(x_{n+2}^2+x_{n+1}x_{n+3}+\cdots+x_2x_{2n+1}+x_2x_{2n+2})-2x_1x_{2n+2}^2$$

≥0

故只需证$x_1=0$的情形，同理，$x_{2n+2}=0$，即$x_1=x_{2n+2}=0$。

令$y_i=x_{i+1}$，要证：

$$(y_n^2+y_{n-1}y_{n+1}+\cdots+y_1y_{2n-1})(y_{n+1}^2+y_ny_{n+2}+\cdots+y_2y_{2n})$$
$+(y_{n-1}^2y_{n+2}^2+y_{n-2}^2y_{n+3}^2+\cdots+y_1^2y_{2n}^2)\le\frac{27}{256}(y_1+y_2+\cdots+y_{2n})^4$，由归纳假设即证。

下证n=2时命题成立，即证明：

$$x_2^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_1x_2x_3x_4+x_1x_3^3+x_2^3x_4\le\frac{27}{256}(x_1+x_2+x_3+x_4)^4.$$

$$\frac{27}{256}(x_1+x_2+x_3+x_4)^4\ge\frac{27}{256}((x_1+x_3)^4+(x_2+x_4)^4+(4x_2^3x_3+6x_2^2x_3^2+4x_2x_3^3)$$
$$+(4x_1^3x_4+6x_1^2x_4^2+4x_1x_4^3)+24x_1x_2x_3x_4)$$

而$\frac{27}{256}(4x_2^3x_3+6x_2^2x_3^2+4x_2x_3^3)\ge\frac{27}{256}\cdot14x_2^2x_3^2\ge x_2^2x_3^2$，

$\frac{27}{256}(4x_1^3x_4+6x_1^2x_4^2+4x_1x_4^3)\ge x_1^2x_4^2$，

$\frac{27}{256}(x_1+x_3)^4\ge x_1x_3^3$（由均值不等式），$\frac{27}{256}(x_2+x_4)^4\ge x_2x_4^3$，即证。

数列不等式

1. 柯西不等式放掉平方，另一边要出现 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$.

即：$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2+x^2}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}$,

要证 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$

只需证：$\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k(a_k-1)+x^2}-\frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1}-1)+x^2}\right)$

而不等式右边 $\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k(a_k-1)+x^2}-\frac{1}{a_k(a_k+1)+x^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a_k}{(a_k^2-a_k+x^2)(a_k^2+a_k+x^2)}$$

$$>\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}$$，得证.

2. 对 $1\le i\le k$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2i^2}$

取 $x_1=\frac{1}{i}-\varepsilon$, $x_2=\frac{1}{i}-2\varepsilon$, $\cdots$, $x_i=\frac{1}{i}-i\varepsilon$.

$x_{i+1}=\frac{\varepsilon}{1\times2}$, $x_{i+2}=\frac{\varepsilon}{2\times3}$, $\cdots$, $x_n=\frac{\varepsilon}{(n-i)(n-i+1)}$

知 $x_1>x_2>\cdots>x_i>x_{i+1}>\cdots>x_n$.

$x_1+x_2+\cdots+x_n<1-\varepsilon+\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-i)(n-i+1)}\right)\varepsilon<1$.

故 $a_1(\frac{1}{i}-\varepsilon)^3+a_2(\frac{1}{i}-2\varepsilon)^3+\cdots+a_i(\frac{1}{i}-i\varepsilon)^3$

$+a_{i+1}(\frac{\varepsilon}{1\times2})^3+a_{i+2}(\frac{\varepsilon}{2\times3})^3+\cdots+a_n(\frac{\varepsilon}{(n-i)(n-i+1)})^3<1$

令 $\varepsilon\to0$. 有 $a_1+a_2+\cdots+a_i\le i^3$

将上式从1加到n $na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n\le\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

下证可以取到. 令 $a_i=i^3-(i-1)^3$, $i=1,2,\cdots,n$.

知 $na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. 只需证:

对 $x_1>x_2>\cdots>x_n>0$, 有: $\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3)x_k^3\le(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$

对n归纳.

n成立. $\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3)x_k^3\le(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$

n+1时,只需证: $((n+1)^3-n^3)x_{n+1}^3\le(x_1+x_2+\cdots+x_{n+1})^3-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^3$

右边 $=x_{n+1}[(x_1+x_2+\cdots+x_{n+1})^2+(x_1+x_2+\cdots+x_{n+1})(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

$+(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2]$

$\ge x_{n+1}((n+1)^2x_{n+1}^2+n(n+1)x_{n+1}^2+n^2x_n^2)$

$=((n+1)^3-n^3)x_{n+1}^3$. 得证.

3. 先猜答案、

$x_i=i$ 时, $a=\frac{1}{2}$.

$x_0=0$ 猜测 x_i 含 i, 又 $\frac{i+1}{x_i}$, 猜测 x_i 中含 $i+1$.

$x_i=i(i+1)$ 时, $a=\frac{1}{2}$.

再考虑 $x_i=i(i+1)(i+2)$.

此时有: $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

令 $n\to+\infty$, 知 $a\leq\frac{4}{9}$. 猜测此为最值.

证明. 柯西. $\frac{\square^2}{x_i-x_{i-1}}+\frac{\square^2}{x_{i-1}} \geq \frac{(\square+\square)^2}{(x_i-x_{i-1})+x_{i-1}}$

结合取等条件 $x_i-x_{i-1}:x_{i-1}=3:i-1$. 确定系数 $\frac{9}{x_i-x_{i-1}}+\frac{(i-1)^2}{x_{i-1}}\geq\frac{(i+2)^2}{x_i}$. $i=2,3,\cdots,n$.

求和得: $9\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i-x_{i-1}}+\frac{9}{x_1} \geq 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{x_i}+\frac{n^2}{x_n}$

$> 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{x_i}$.

即知: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-x_{i-1}} > \frac{4}{9}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{x_i}$.

下课休息到10:27.

4. $i=1,2,\cdots,2n-1$ 时，$|a_{i+1}-a_i|$ 互不相同.

$1\le|a_{i+1}-a_i|\le 2n-1$.

故 $i=1,2,\cdots,2n-1$ 时，$|a_{i+1}-a_i|$ 取 $1,2,\cdots,2n-1$ 各1次

$\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|=1+2+\cdots+(2n-1)=2n^2-n$

充分性：设 $1\le a_{2k}\le n$，此时 a_{2k-1} 取遍 $n+1,n+2,\cdots,2n$.

$\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|=\sum_{i=1}^{n}|a_{2i-1}-a_{2i}|+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{2i+1}-a_{2i})$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|+(a_1-a_{2n})&=2\left(\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}a_{2i}\right)\\&=2\left(\sum_{i=1}^{n}(n+i)-\sum_{i=1}^{n}i\right)\\&=2n^2\end{aligned}$$

则知 $a_1-a_{2n}=n$.

必要性：若 $a_1-a_{2n}=n$，知 $\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|+|a_1-a_{2n}|=2n^2$.

$\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|+|a_1-a_{2n}|=2n^2$

注意到 $|x-y|=x+y-2\min\{x,y\}$，代入.

知：$\sum_{i=1}^{2n-1}\min\{a_{i+1},a_i\}+\min\{a_1,a_{2n}\}=2(1+2+\cdots+n)$

注意到每个正整数最多在其中出现2次.

从而 $1,2,\cdots,n$ 均在 $\min\{a_{i+1},a_i\}$ $(1\le i\le 2n-1)$，$\min\{a_1,a_{2n}\}$ 中恰出现2次.

从而每一个不大于 n 的数两边必是大于 n 的数，每一个大于 n 的数两边必是不大于 n 的数.

注意到 $a_1=a_{2n}+n>n$，故 $a_2\le n$，$a_3>n$，$\cdots$，$a_{2n-1}>n$，$a_{2n}\le n$.

从而 $1\le a_{2k}\le n$ 对 $k=1,2,\cdots,n$ 成立.

5. 考察a_k除以$k+1$.

$a_1=2$时，归纳可证$a_k=k+1$满足题设.

$a_1<2$时，归纳可证$a_k<k+1$.

令$b_k=\frac{a_k+1}{k+1}$，知$b_k^2>b_{k+1}$等价于：$a_k^2>\frac{(k+1)^2}{k+2}a_{k+1}$.

等价于$1>\frac{a_k+1}{k+2}$，该式成立.

从而$b_k<b_{k-1}^2<\cdots<b_1^{2^{k-1}}$，即：$a_k<(k+1)b_1^{2^{k-1}}$，该式成立.

注意到$b_1<1$，存在k使得：$(k+1)b_1^{2^{k-1}}<1$，则$a_k<1$.

与$a_k^2=1+ka_{k+1}>1$矛盾.

$a_1>2$时，归纳可证$a_k>k+1$.

知$b_k^2<b_{k+1}$等价于$a_k^2<\frac{(k+1)^2}{k+2}a_{k+1}$.

等价于$1<\frac{a_k+1}{k+2}$，该式成立.

$b_k>b_{k-1}^2>\cdots>b_1^{2^{k-1}}$，即：$a_k>(k+1)b_1^{2^{k-1}}$

由$b_1>1$知存在正整数N，$k>N$时，$b_1>e^{\frac{2}{k}}$.

此时$a_k>e^{\frac{2}{k}\cdot 2^{k-1}}=e^{\frac{2^k}{k}}$，矛盾.

6. 知 $x_{k-1}\le 1$, 对 $1\le k\le n$. 又 $a_k\ge 1$.

故 $\frac{1}{x_k}=1+a_kx_{k-1}\le a_k+x_{k-1}$ 排序不等式

从而 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\le\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}x_{k-1}<\sum_{k=1}^{n}a_k+1+\sum_{k=1}^{n-1}x_k$

$<A+\sum_{k=1}^{n}x_k$

由柯西不等式. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k\ge n^2$

$\sum_{k=1}^{n}x_k(A+\sum_{k=1}^{n}x_k)>\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge n^2$.

再由二次方程求根公式,

$\cancel{\sum_{k=1}^{n}x_k>\frac{A+\sqrt{n^2+4A^2}}{2}=\frac{2n^2}{}}$

$\cancel{\frac{-A+\sqrt{n^2+4A^2}}{2}=\frac{2n^2}{A+\sqrt{n^2+4A^2}}}$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k>\frac{-A+\sqrt{A^2+4n^2}}{2}=\frac{2n^2}{A+\sqrt{A^2+4n^2}}>\frac{2n^2}{A+(A+\frac{2n^2}{A})}=\frac{n^2A}{n^2+A^2}.$$

$$(\sqrt{A^2+4n^2}\le\sqrt{A^2+2A\cdot\frac{2n^2}{A}+(\frac{2n^2}{A})^2}=A+\frac{2n^2}{A})$$

7. $x_{k-1}-(2-b_k)x_k+x_{k+1}=0$

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}=-b_kx_k$.

设 $a_k=-b_kx_k$

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}=a_k$.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=a_1 \\ x_1-2x_2+x_3=a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}-2x_n=a_n \end{cases}$$

将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 看成常数. 求 x_k.

$-2x_1+x_2=a_1$

$x_1-2x_2+x_3=a_2$

$-3x_2+2x_3=a_1+2a_2$

$x_2-2x_3+x_4=a_3$

$-3x_3+3x_4=a_1+2a_2+3a_3$

$\cdots$

可得: $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ka_k=-(k+1)x_k+kx_{k+1}$

$a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots+(n-k)a_{k+1}=(n-k)x_k-(n-k+1)x_{k+1}$

消去 x_{k+1} 得: $-(n+1)x_k=(n+1-k)(a_1+2a_2+\cdots+ka_k)$
$+k((n-k)a_{k+1}+\cdots+2a_{n-1}+a_n)$

取 k 使 $|x_k|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, 则 $|x_n|>0$.

则 $(n+1)|x_k|\le(n+1-k)|b_1||x_1|+2(n+1-k)|b_2||x_2|$
$+\cdots+k(n+1-k)|b_k||x_k|$
$+k(n-k)|b_{k+1}||x_{k+1}|+\cdots+k|b_n||x_n|$
$\le((n+1-k)b_1+(n+1-k)b_2+\cdots+k(n+1-k)b_k$
$+k(n-k)b_{k+1}+\cdots+kb_n)|x_k|$,

故 $n+1\le(n+1-k)b_1+2(n+1-k)b_2+\cdots+k(n+1-k)b_k+\underline{k(n-k)}b_{k+1}$
$+\cdots+kb_1$.
$\le k(n+1-k)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\le\frac{(n+1)^2}{4}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$,
$b_1+b_2+\cdots+b_n\ge\frac{4}{n+1}$.

8. 定义 $a(0)=0$.

$a(n_1+n_2+\cdots+n_k)$

$2a(n_1)$ $\quad$ $2a(n_2+\cdots+n_k)$

$2^2a(n_2)$ $\quad$ $2^2a(n_3+n_4+\cdots+n_k)$

下标的顺序[illegible]数求

$2^3a(n_3)$ $\quad \cdots$

或: $a(n_1+n_2+\cdots+n_k)$

$=a(n_1+n_2+\cdots+n_k+\underbrace{0+\cdots+0}_{2^d-k个0})$

$2a(n_1+n_2+\cdots)$ 共2^{d-1}项 $\quad$ $2a(n_0+n_0+\cdots+n_0)$

$\cdots$

$2^da(n_1)$ $\quad$ $2^da(n_2)$ $\quad$ $2^da(n_3)$ $\quad\cdots\quad$ $2^da(0)$

引理: 对任意非负整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$, 有

(i) $a\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)\le\sum_{i=1}^k 2^i a(n_i)$

(ii) $a\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)\le 2k\sum_{i=1}^k a(n_i)$

引理的证明: (i) 归纳即可

(ii) 归纳不难证. $a\left(\sum_{i=1}^{2^d} n_i\right)\le 2^d a\sum_{i=1}^{2^d}a(n_i)$.

设 $d\ge0$, $2^{d-1}<k\le2^d$, 则

$$a\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)=a\left(\sum_{i=1}^k n_i+0+0+\cdots+0\right)$$

$$\le 2\left(a\left(\sum_{i=1}^{2^{d-1}}n_i\right)+a\left(\sum_{i=2^{d-1}+1}^k n_i+0+0+\cdots+0\right)\right)$$

$$\le 2\left(2^{d-1}\sum_{i=1}^{2^{d-1}}a(n_i)+2^{d-1}\sum_{i=2^{d-1}+1}^k a(n_i)+2^{d-1}\cdot0+2^{d-1}\cdot0+\cdots\right).$$

回到原题.

设 $0=M_0<M_1<\cdots$ 递增无穷.

对 $n=\sum_{i=1}^d \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i\in\{0,1\}$. $i>d$ 时定义 $\varepsilon_i=0$.

取 f 使 $M_f>d$.

知 $a(n)=a\left(\sum_{k=1}^f\sum_{M_{k-1}<i\le M_k}\varepsilon_i2^i\right)$

$$\le\sum_{k=1}^f 2^k\left(\sum_{M_{k-1}<i\le M_k}\varepsilon_i2^i\right)\quad(由引理(i))$$

$$\le\sum_{k=1}^f 2^k\cdot 2(M_k-M_{k-1}+1)\sum_{M_{k-1}<i\le M_k}\varepsilon_i a(2^i)\quad(由引理(ii))$$

扫描全能王 创建

$$\left(\sum_{k=1}^{f} 2^k \cdot 2(M_k - M_{k-1}+1)^2 \frac{1}{(M_{k-1}+1)^c}\right)$$

$$\le \sum_{k=1}^{f} 2^k \cdot 2(M_k +1)^2 \frac{1}{(M_{k-1}+1)^c}$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{M_k+1}{M_{k-1}+1}\right)^2 \cdot \frac{2^{k+1}}{(M_{k-1}+1)^{c-2}}$$ （要让 $(M_{k-1}+1)^{c-2}$ 压住 2^{k+1}）

取 $M_k = 4^{\frac{k}{c-2}}-1$，上式即：$8 \times 4^{\frac{2}{c-2}} \sum_{k=1}^{f} \frac{1}{2^k} < 8 \times 4^{\frac{2}{c-2}}$.

所以 $\{a(n)\}$ 有界.

1. $(x^2+y+1)(1+y+z^2) \ge (x+y+z)^2$，柯西不等式.

$$\frac{1}{x^2+y+1} \le \frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}$$

从而 $\sum \frac{1}{x^2+y+1} \le \frac{3+\sum x+\sum x^2}{(x+y+z)^2} = \frac{\sum x^2+\sum x+3}{\sum x^2+2\sum x}$.

注意到 $\sum x = \sum xy \le \frac{(\sum x)^2}{3}$，而 $\sum x \ge 3$，从而上式 ≤ 1.

$x=y=z=1$ 时取等. 得证.

$$\cancel{\left(\sum_{k=1}^{t} 2^k \cdot 2(M_k-M_{k-1}+1)^2 \frac{1}{(M_{k-1}+1)^2}\right)}$$

2. $a=b=\frac{3}{2}$，$c=0$ 时，$ab^2+bc^2+ca^2=\frac{27}{8}$.

下证：$ab^2+bc^2+ca^2\le\frac{27}{8}$

知：$(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)$

$=(ab-ac)(a-b)+(bc-ac)(b-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0$

从而 $ab^2+bc^2+ca^2$

$\le\frac{1}{2}(ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a)$

$\cancel{=\frac{1}{2}((ab+bc+ca)(a}$

$=\frac{1}{2}(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))$

$=\frac{1}{2}(ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-3abc)$

$=\frac{3}{2}(ab+bc+ca-abc)$

$\le\frac{3}{2}(ab+ca)$ ~~(注意…ab≥abc~~ (注意 $a\ge1$, $bc\le abc$)

$\le\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2=\frac{27}{8}$，得证.

下课伸见到 3:38、

3. (1) 伯努利不等式 $a^k \le 1+k(a-1)$

从而 $ab^k+bc^k+ca^k \le c(1+k(a-1))+a(1+k(b-1))+\cancel{c(1+k(a-1))}$ $b(1+k(c-1))$

$$=k(a+b+c)+(1-k)(ab+bc+ca)$$

$$=3, \quad a=b=c=1 \text{ 时取到}.$$

(2) $b=0$ 时，ca^k 最大：$\dfrac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}$.

对应 $a=\dfrac{3k}{k+1}$，$c=\dfrac{3}{k+1}$. 不妨设 a 最大.

$a \ge c \ge b$ 时，我们证明：$ab^k+bc^k+ca^k \le c(a+b)^k$

$$c(a+b)^k \ge ca^{k-2}(a+b)^2$$

$$=ca^{k-2}(a^2+2ab+b^2)$$

$$\ge ca^k+a^{k-1}bc+a^{k-1}bc$$

$$\ge ca^k+bc^k+ab^k \quad (a^{k-1}bc \ge ab^k \text{ 需要 } c \ge b)$$

$a \ge b \ge c$ 时，我们证明：$ab^k+bc^k+ca^k \le a^kb+b^kc+c^ka$

事实上，上式 $\Leftrightarrow a^k(b-c)+c^k(a-b) \ge b^k(a-c)$

$$\Leftrightarrow (a^k-b^k)(b-c) \ge (b^k-c^k)(a-b)$$

$a \ne b$，$b \ne c$ 时，上式即：$\dfrac{a^k-b^k}{a-b} \ge \dfrac{b^k-c^k}{b-c}$.

不难验证 $\dfrac{a^k-b^k}{a-b} \ge kb^{k-1} \ge \dfrac{b^k-c^k}{b-c}$.

(证明：$(b+x)^k-b^k-kb^{k-1}x$ 记为 $f(x)$，$x \ge 0$

$f'(x)=k(b+x)^{k-1}-kb^{k-1} \ge 0$. 得证。)

得证。化为 $a \ge c \ge b$ 情形

而 $c(a+b)^k=\frac{1}{k}\cdot kc(a+b)^k \le \frac{1}{k}\left(\dfrac{kc+k(a+b)}{k+1}\right)^{k+1}=\dfrac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}$.

得证.

注：$1<k<2$ 时，最大值 $\max\left\{3, \dfrac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right\}$.

4. 不等式右的分母也出现 $\sqrt{abc}$ 很难证. 换元将其换掉、

代换：$x=\frac{1}{a}$ $y=\frac{1}{b}$ $z=c$

有：$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1}=\frac{\sqrt{\frac{x^3+y^3}{xy}}}{xy+1}\geq\frac{\sqrt{\frac{x^2y+xy^2}{xy}}}{xy+1}=\frac{\sqrt{x+y}}{xy+1}$.

只需证：$xy+yz+zx=1$ 时. $\sum\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{3\sqrt{2xyz}}\sum\frac{\sqrt{x+y}}{xy+1}$.

知 $\frac{x}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+xy+xz+yz}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}$.

故 $\sum\frac{x}{x^2+1}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(x+z)(y+z)}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

发现 x^2+1, y^2+1 相似难处理.

柯西不等式化 $xy+1$.

$$xy+1\leq\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}=\sqrt{(x+y)^2(y+z)(z+x)}$$

故 $\frac{1}{3\sqrt{2xyz}}\sum\frac{\sqrt{x+y}}{xy+1}$

$$\geq\frac{1}{3\sqrt{2xyz}}\cdot\sum\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\geq\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$ 得证、

5. 注。$\dfrac{c}{a+2b}+1=\dfrac{a+2b+c}{a+2b}$

$\dfrac{a+2b}{c}+1=\dfrac{a+2b+c}{c}$，统一分子后求和。

故：$\sum\dfrac{c}{a+2b}+\sum\dfrac{a+2b}{c}$

$=\sum\left(\dfrac{a+2b+c}{a+2b}+\dfrac{a+2b+c}{c}\right)-8$

$=\sum\dfrac{(a+2b+c)^2}{c(a+2b)}-8$

柯西不等式终极形式：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{b_i}\geq\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}$

上式 $\geq\dfrac{\left(\sum(a+2b+c)\right)^2}{\sum c(a+2b)}-8$

$=8\left(\dfrac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+ad+bc+bd+cd}-1\right)$，即证.

6. $a=b=c=d=1$ 时取到 $\frac{4}{5}$.

$c=d=0$ 时 $\frac{4-b}{b^2+4}+\frac{b}{4}$ 不难算出 $a=b=2$ 时最小 $\frac{2}{3}$.

下证最小值为 $\frac{2}{3}$, 即 $\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{c^2+4}+\frac{c}{d^2+4}+\frac{d}{a^2+4}\geq\frac{2}{3}$.

由均值不等式, $b^3+4=\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}+4\geq 3b^2$

故 $\frac{4a}{b^2+4}=a-\frac{ab^3}{b^2+4}\geq a-\frac{ab}{3}$.

$$\sum\frac{a}{b^3+4}\geq\frac{\sum a}{4}-\frac{\sum ab}{12}$$

而 $\sum ab=(a+c)(b+d)\leq\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2=4$.

故 $\sum\frac{a}{b^2+4}\geq 1-\frac{4}{12}=\frac{2}{3}$, 即知 $\frac{2}{3}$ 为最小值.

7. 不妨设 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4$、

条件 $a_1^2+a_2^2+a_3^2\ge 2(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$

$\iff (a_3+a_2)^2+a_1^2\ge 2a_1(a_2+a_3)+4a_2a_3$

$\iff (a_3+a_2-a_1)^2\ge (2\sqrt{a_2a_3})^2$

$\iff a_3+a_2-a_1\ge 2\sqrt{a_2a_3}$

$\iff \sqrt{a_3}\ge\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}$

类似地，有：$\sqrt{a_4}\ge\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}$.

设 $a_2=\beta^2$，$a_3=\gamma^2$. $\gamma\ge\beta>0$，有：

$a_1\le\min\{(\gamma-\beta)^2,\beta^2\}$　$a_4\ge(\beta+\gamma)^2$.

首先求 $a_1=\min\{(\gamma-\beta)^2,\beta^2\}$，$a_4=(\beta+\gamma)^2$ 时 $\dfrac{\sum_{i=1}^{4}a_i^2}{\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j}$ 最小值.

允许 $a_1=0$.

若 $\gamma\le 2\beta$，有：$\sum_{i=1}^{4}a_i^2=3(\beta^4+4\beta^2\gamma^2+\gamma^4)$，$\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j=3(\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4)$.

$$\frac{\beta^4+4\beta^2\gamma^2+\gamma^4}{\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4}=1+\frac{3}{\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}+1}\ge 1+\frac{3}{4+\frac{1}{4}+1}=\frac{11}{7}.$$

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=4$，$a_4=9$ 时可以取到 $\frac{11}{7}$.

若 $\gamma>2\beta$，$a_1=\beta^2$，

$\sum_{i=1}^{4}a_i^2=2\gamma^4+4\beta\gamma^3+6\beta^2\gamma^2+4\beta^3\gamma+3\beta^4$

$\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j=\gamma^4+2\beta\gamma^3+5\beta^2\gamma^2+4\beta^3\gamma+3\beta^4$

$\sum_{i=1}^{4}a_i^2\ge\frac{11}{7}\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j \iff 3\gamma^4+6\beta\gamma^3-13\beta^2\gamma^2-16\beta^3\gamma-12\beta^4\ge 0$.

$\gamma=2\beta$ 时式为 0.

由 $\gamma>2\beta$，上式成立

下证：$a_1\le\min\{(\gamma-\beta)^2,\beta^2\}$，$a_4\ge(\beta+\gamma)^2$ 条件下，仍有：

$\sum_{i=1}^{4}a_i^2\ge\frac{11}{7}\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j$. 令 $F=\sum_{i=1}^{4}a_i^2-\frac{11}{7}\sum_{1\le i<j\le 4}a_ia_j$

固定 a_2,a_3,a_4. 知 $a_1<\frac{11}{14}(a_2+a_3+a_4)$ 时，F 关于 a_1 递减.

而 $\min\{(\gamma-\beta)^2,\beta^2\}\le\beta^2=a_2<\frac{11}{14}(a_2+a_3+a_4)$

故只需证 $a_1=\min\{(\gamma-\beta)^2,\beta^2\}$ 时 $F\ge 0$.

固定 a_1,a_2,a_3. 当 $a_4\ge\frac{11}{14}(a_1+a_2+a_3)$ 时，F 关于 a_4 递增.

$\frac{11}{14}(a_1+a_2+a_3)\le\frac{11}{14}(\beta^2+\beta^2+\gamma^2)\le\frac{11}{14}(\beta+\gamma)^2<(\beta+\gamma)^2$，故只需 $a_4=(\beta+\gamma)^2$. $F\ge 0$.

证毕.