8. 分母换元. 然后放缩分子.

记 $\begin{cases} x=\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a} \\ y=\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b} \\ z=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c} \end{cases}$

不妨假定 $x, y, z > 0$，且 $a=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$, b, c 类似.

从而 $b+c-a=\left(\frac{z+x}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$

$$=\frac{x^2+xy+xz-yz}{2}$$

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2}}=\sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}\leq 1-\frac{(x-y)(x-z)}{4x^2}$$

经典去根号公式 $\sqrt{1-x}\leq 1-\frac{x}{2}$. 分别两式类似.

三式相加，只需证：$\sum \frac{(x-y)(x-z)}{x^2} \geq 0$，直接柯西也可以利用舒尔.

不妨设 $x \geq y \geq z$，

有 $\frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \geq \frac{(x-z)(y-z)}{y^2} \geq \frac{(x-y)(y-z)}{y^2} = -\frac{(y-z)(y-x)}{y^2}$.

$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} \geq 0$. 两式求和即证.

代数解题

1. 设 $t=\lambda^{\frac{1}{3}}$，则 $t^3=t^2+1$.

知 $f(x)=x^3-x^2-1$ 只有唯一实根 t，$f(\sqrt{2})<0$ 故 $t>\sqrt{2}$.

设 u,v 为 $f(x)=0$ 的另外两个复根，知 u,v 为共轭复数.

由韦达定理，$tuv=1$. 故 $|u|=|v|=|t|^{-\frac{1}{2}}<2^{-\frac{1}{4}}$.

取 $M=u^{900}+v^{900}+t^{900}$

由 u,v,t 是首一整系数多项式 $f(x)$ 的三个根，知 M 是整数.

简单证明知 $u^{n+3}=u^{n+2}+u^n$. 其它两式类似.

三式求和：设 $a_j=u^j+v^j+t^j$，递推式：$a_{j+3}=a_{j+2}+a_j$.

可以算出 a_0, a_1, a_2 为整数，归纳得知 a_j 均为整数.

$|M-x^{300}|=|M-t^{900}|=|u^{900}+v^{900}|<2\cdot 2^{-\frac{900}{4}}<\frac{1}{4^{100}}$.

又 $\lambda>2$，知 M 为正整数.

2. 若 $x=0$，由前一式知 $y=0$ 不满足后式，故 $x\neq 0$，同理 $y\neq 0$.

由 $x(1-2y)\geq 0$，$y(1-2x)\geq 0$.

若 $x<0$，由 $1-2x>0$ 知 $y>0$.

此时 $\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}>2>\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}$，矛盾.

故 $x>0$. 同理 $y>0$ 知 $0<x,y\leq\frac{1}{2}$.

由 $\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$.

知 $\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\geq\frac{2}{1+2xy}$ 柯西不等式.

$$\left(\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+2xy}\right)+\left(\frac{1}{1+2y^2}-\frac{1}{1+2xy}\right)\geq 0$$

$$\frac{x(y-x)}{(1+2xy)(1+2x^2)}+\frac{y(x-y)}{(1+2xy)(1+2y^2)}\geq 0$$

即: $\dfrac{(x-y)^2(1-2xy)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \le 0$

由 $1-2xy > 1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} > 0$, 知 $(x-y)^2 \le 0$, 即 $x=y$.

代入后一式, 即知 $x=y=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{18}$.

经检验, $x=y=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{18}$ 满足题设.

3. (1) $0 \to 1 \quad 1 \to 2 \quad 2 \to 3 \quad \cdots \quad 9999 \to 10000$

合并起来, 结果: 前一项 $0 \to 10000$, 后一项 $1 \to 10001$

再后一项 $2 \to 10002$, ⋯

a_1:	00000	00001	00002	⋯	09999
a_2:	00001	00002	00003	⋯	10000
		⋮			

a_{2022} 02022 02023 02024 $\cdots$ 12021

知 $a_1, a_2, \cdots, a_{2022}$ 构成等差数列. 公差

00001 00001 00001 $\cdots$ 00001

但数字和下面比上面大! 满足题设.

(2) 不存在.

若 $a_1, a_2, \cdots$ 满足要求.

设 d 为公差. $a_{n+1} = a_1 + nd$.

设 a 是 k 位数 取 $n = 10^{k+1}$.

知 $a + 10^{k+1}d$ 数字和为 a 的数字和加上 d 的数字和.

再取 $n = 10^{k+2}$.

$a + 10^{k+2}d$ 数字和也为 a 的数字和加上 d 的数字和.

$10^{k+2} > 10^{k+1}$，矛盾.

下课休息到10:12.

4. 注意 $\sqrt{a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}+a_{i+2}^2+a_ia_{i+1}}$ 中的 a_ia_{i+1} 换成 $a_{i+1}a_{i+2}$，这一项就会变成 $a_{i+1}+a_{i+2}$ 很好处理.

$\sqrt{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}}$ 中的 $a_{i+1}a_{i+2}$ 则需要换成 a_ia_{i+1}，两项搭配. 发现引理中的交换条件即可.

引理：非负实数 x,y,z,w 满足：$(x-y)(z-w)\ge 0$ 时.

有：$\sqrt{x+w}+\sqrt{y+z}\ge\sqrt{x+z}+\sqrt{y+w}$.

引理的证明：平方即知.

回到原题. 对任意整数 i，

$$((a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}+a_{i+2}^2)-(a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2))(a_{i+1}a_{i+2}-a_ia_{i+1})$$

$$=a_{i+1}(a_{i+2}-a_{i+1})^2(a_i+a_{i+1}+a_{i+2})\geq 0$$

由引理. $\sqrt{a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}+a_{i+2}^2+a_ia_{i+1}}+\sqrt{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}}$

$$\geq\sqrt{a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}+a_{i+2}^2+a_{i+1}a_{i+2}}+\sqrt{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2+a_ia_{i+1}}$$

$$=a_i+2a_{i+1}+a_{i+2}.$$

故 $\max\left\{\sum_{i=1}^{4}\sqrt{a_i^2+a_ia_{i-1}+a_{i-1}^2+a_{i-1}a_{i-2}},\ \sum_{i=1}^{4}\sqrt{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}}\right\}$

$$\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(\sqrt{a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}+a_{i+2}^2+a_ia_{i+1}}+\sqrt{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(a_i+2a_{i+1}+a_{i+2})$$

$$=2.$$

5. $a_1=1$, $b_1=0$. $a_2=13$. $b_2=7$.

设 $13^2=(t+1)^3-t^3$, 知 $t=7$. 猜测: $a_n^3=(b_n+1)^3-b_n^3$

归纳. 设对 n 成立. 对 $n+1$.

$$(b_{n+1}+1)^3-b_{n+1}^3$$

$$=3(4a_n+7b_n+3)^2+3(4a_n+7b_n+3)+1$$

$$=48a_n^2+147b_n^2+168a_nb_n+84a_n+147b_n+37$$

$$=(7a_n+12b_n+6)^2+\underline{(3b_n^2+3b_n+1-a_n^2)}$$

$=a_{n+1}^2$, 由归纳假设. 所证.

6. 最大值 $\frac{1}{3}$. $ab^2c+ab^2c+abc^2 \le a^2\frac{b^2+c^2}{3}+b^2\frac{c^2+a^2}{2}+c^2\frac{a^2+b^2}{2}$

$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2=\frac{1}{3}$$

$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取到.

对于最小值. 即求 $abc(a+b+c)$ 最小值.

只需考虑 a,b,c 两正一负情形. 不妨设 $a,b>0$. $c<0$.

只需考虑 $a+b+c>0$.

设 $x=-c$. 知 $a^2+b^2=1-x^2$, $a+b-x>0$. 此时 $x^2<\frac{2}{3}$.

$$abx(a+b-x) \le \frac{a^2+b^2}{2}x\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}-x\right)=\frac{x(1-x^2)}{2}\left(\sqrt{2(1-x^2)}-x\right)$$

我们求 $f(x)=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{2}\left(\sqrt{2(1-x)}-\sqrt{x}\right)$ 在 $x\in[0,\frac{2}{3}]$ 上的最大值.

上式即 $f(x^2)$.

注意到 $f(0)=f(\frac{2}{3})=0$，知最大值在 $f'(x)=0$ 点处取得.

又 $$f'(x)=\frac{-\sqrt{x}+\frac{1-x}{2\sqrt{x}}}{2}\left(\sqrt{2(1-x)}-\sqrt{x}\right)+\frac{(1-x)\sqrt{x}}{2}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2(1-x)}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{1-3x}{4\sqrt{x}}\left(\sqrt{2(1-x)}-\sqrt{x}\right)+\frac{(1-x)\sqrt{x}}{2}\left(\frac{-\sqrt{2(2-x)}}{2(1-x)}-\frac{\sqrt{x}}{2x}\right)$$

$$=\frac{1-3x}{4\sqrt{x}}\sqrt{2(1-x)}-\frac{1-2x}{2}-\frac{\sqrt{2x(1-x)}}{4}$$

$$=\frac{(1-4x)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}-\frac{1-2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2x}}\left((1-4x)\sqrt{1-x}+(2x-1)\sqrt{2x}\right)$$

令 $(1-4x)\sqrt{1-x}=(1-2x)\sqrt{2x}$

平方得: $(1-8x+16x^2)(1-x)=(4x^2-4x+1)2x$

$$1-9x+24x^2-16x^3=8x^3-8x^2+2x$$

$$24x^3-32x^2+11x-1=0$$

$$(3x-1)(8x^2-8x+1)=0.$$

此方程三个根中$\frac{1}{3}$是增根，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}>\frac{2}{3}$.

故$x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$是$f(x)$最大值点.

原问题最小值$-f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{1+\sqrt{2}}{16}$.

7. 设 $S_1=\sin\frac{2\pi}{7}$, $S_2=\sin\frac{4\pi}{7}$. $S_3=\sin\frac{8\pi}{7}$.

首先证明如下结论:

(1) $S_1+S_2+S_3=\frac{\sqrt{7}}{2}$

(2) $S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3=0$

(3) $S_1S_2S_3=-\frac{\sqrt{7}}{8}$.

事实上, 先证(2). $\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{10\pi}{7}\right)=0$$

再证(1). 知 $\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}+\sin^2\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}\sin^2\frac{2k\pi}{7}$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{6}\left(1-\cos\frac{4k\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(7-\sum_{k=1}^{7}\cos\frac{4k\pi}{7}\right)$$

$=\frac{7}{4}$. 又(2), 知 $(S_1+S_2+S_3)^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

不难知 $s_1+s_2+s_3>0$，所以 $s_1+s_2+s_3=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(3) 因为 $4\left(\sin^3\frac{2\pi}{7}+\sin^3\frac{4\pi}{7}+\sin^3\frac{8\pi}{7}\right)$

$$=3\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)-\left(\sin\left(3\times\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(3\times\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(3\times\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

$$=3(s_1+s_2+s_3)-\left(\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{12\pi}{7}+\sin\frac{24\pi}{7}\right)$$

$$=3(s_1+s_2+s_3)+\left(\sin\frac{8\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$=4(s_1+s_2+s_3)$$

故 $s_1^3+s_2^3+s_3^3=s_1+s_2+s_3=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

又 $s_1^3+s_2^3+s_3^3-3s_1s_2s_3=(s_1+s_2+s_3)(s_1^2+s_2^2+s_3^2-s_1s_2-s_2s_3-s_3s_1)$

(1)(2)代入可证.

设 $x_i = \frac{\csc\frac{2^i\pi}{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}s_i}$

知 $x_1+x_2+x_3 = \frac{s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1}{\sqrt{7}s_1s_2s_3} = 0 \in Q$.

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = -\frac{4}{7} \in Q$.

$x_1x_2x_3 = -\frac{8}{49} \in Q$.

由韦达定理, x_1, x_2, x_3 是 $x^3-\frac{4}{7}x+\frac{8}{49}=0$ 的三根.

故 $x_i^n = \frac{4}{7}x_i^{n-2} - \frac{8}{49}x_i^{n-3}$, $i=1,2,3$.

求和知: $x_1^n+x_2^n+x_3^n = \frac{4}{7}(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}+x_3^{n-2}) - \frac{8}{49}(x_1^{n-3}+x_2^{n-3}+x_3^{n-3})$.

$n=3,4,\cdots$ 归纳得证对任意 $n\in N^*$. $x_1^n+x_2^n+x_3^n$ 为有理数.

原式即: $7^{1033}(x_1x_2x_3)^{20}\left((x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^{2003}+x_2^{2003}+x_3^{2003}) - (x_1^{2006}+x_2^{2006}+x_3^{2006})\right)$, 即证.

8. $f(x)$和$f(y)$很难算. 找两者间关系.

$x \ge f(y)$

当 $y \ge x$ 时 $f(x) = \left(\sum_{a_i \le x} c_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{a_i > x} c_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\le \left(\sum_{a_i \le y} c_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{x < a_i \le y} c_i a_i^{\alpha} + \underline{\sum_{a_i > y} c_i a_i^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

证明如下简单引理.

对 $X, Y \ge 0$. $r > 0$. 有: $(X+Y)^r \le 2^r (X^r + Y^r)$

引理的证明: $(X+Y)^r \le (2\max\{X, Y\})^r = 2^r \max\{X^r, Y^r\}$

$$\le 2^r (X^r + Y^r) \text{ 得证.}$$

从而 $f(x) \le \left(\sum_{a_i \le y} c_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{x < a_i \le y} c_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{a_i > y} c_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\le 2^{\frac{1}{\alpha}} f(y) + 2^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{x < a_i \le y} c_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad ①$$

下面放缩 $\left(\sum_{x < a_i \le y} c_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$$\sum_{x<a_i\le y} c_i a_i^{\alpha} = \sum_{x<a_i\le y} c_i a_i^{2}\cdot a_i^{\alpha-2} \le x^{\alpha-2}\sum_{x<a_i\le y} c_i a_i^{2}$$

$$\le x^{\alpha-2}\sum_{a_i\le y} c_i a_i^{2}$$

$$\le x^{\alpha-2} f(y)^2 \le x^{\alpha}$$

利用 $0<\alpha<2$ 及 $f(y)\le x$.

由①知 $f(x) \le 2^{\frac{1}{\alpha}} f(y) + 2^{\frac{1}{\alpha}} x \le 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} x$.

$y<x$ 类似知

$$f(x) = \Big(\sum_{a_i\le y} c_i a_i^2 + \sum_{y<a_i\le x} c_i a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{a_i>x} c_i a_i^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\le 2^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{a_i\le y} c_i a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{y<a_i\le x} c_i a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{a_i>y} c_i a_i^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\le 2^{\frac{1}{2}} f(y) + 2^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{y<a_i\le x} c_i a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le 2^{\frac{1}{2}} f(y) + 2^{\frac{1}{2}}\Big(x^{2-\alpha}\sum_{y<a_i\le x} c_i a_i^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}}$$ (利用 $0<\alpha<2$)

$\leq 2^{\frac{1}{2}} f(y) + 2^{\frac{1}{2}} (x^{2-\alpha} f^{\alpha}(y))^{\frac{1}{2}}$

$\leq 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$\leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} x$. 即证.

数论中的代数方法

1. 熟知 $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

取 M 充分大, $M > 1$ 使 $M > 2\sqrt{M} + c$.

知 $a_n < M$, 则 $a_{n+1} < 2\sqrt{a_n} + c < 2\sqrt{M} + c < M$.

又 $a_1 = 1$. 知 $\{a_n\}$ 中各项均小于 M.

$a_1, a_2, \cdots a_M$ 不同取值数 $\leq M-1$ 抽屉原理,

必有两个相同. 设为 a_i, a_j. $i<j$.

由 $a_i = a_j$ 知 $a_{i+1} = d(a_i) + c = d(a_j) + c = a_{j+1}$.

$a_{i+2}=a_{j+2}$, $\cdots$ 对 $\forall t\in N^*$, $a_{i+t}=a_{j+t}$.

故数列以 $j-i$ 为周期. 既证.

2. 注意到 $a_{n+1}\geq a_n$ (注意 $f(n)>0$)

故 $a_{n+1}\geq a_n+\sqrt{a_n^2+1}>2a_n$.

有: $(a_{n+1}-a_n)^2=a_na_{n+1}+f(n)$

$$f(n)=a_{n+1}^2-3a_na_{n+1}+a_n^2$$

$$f(n+1)=a_{n+2}^2-3a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2$$

知: $(a_{n+2}^2-3a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+1}^2)-(a_n^2-3a_na_{n+1}+a_{n+1}^2)$

$=f(n+1)-f(n)$

$$|a_{n+2}-a_n|\cdot|a_{n+2}+a_n-3a_{n+1}|=|f(n+1)-f(n)|$$

知: $|a_{n+2}-a_n|\geq a_{n+2}-a_n\geq a_{n+1}\geq 2^na_1\geq 2^n$

存在正整数N，$n>N$时，$2^n>|f(n)-f(n+1)|$
$\Rightarrow$ 多项式.

故 $a_{n+2}+a_n-3a_{n+1}=0$

$f(n+1)=f(n)$

$f(N+1)=f(N+2)=\cdots$

$f(x)=f(N+1)$ 无穷多个解，知f为常数.

3. 注意到 $a_{n+1}=a_n^2+a_n+c^3\equiv a_n \pmod{a_n^2+c^3}$

$a_{n+1}^2+c^3\equiv a_n^2+c^3 \pmod{a_n^2+c^3}$

$$a_{n+1}^2+c^3=(a_n^2+a_n+c^3)^2+c^3$$
$$=(a_n^2+c^3)(a_n^2+c^3+2a_n)+a_n^2+c^3$$
$$=(a_n^2+c^3)(a_n^2+2a_n+1+c^3)$$

下证：$(a_n^2+c^3,\ a_n^2+2a_n+1+c^3)=1$

反证. 设 $p \mid a_n^2+c^3$, $p \mid a_n^2+2a_n+1+c^3$.

知 $p \mid 2a_n+1$.

又 $p \mid 4a_n^2+4c^3$, 知 $p \mid 4c^3+1$.

$$p \mid 4a_n+2 = 4(a_{n-1}^2+a_{n-1}+c^3)+2$$
$$= (2a_{n-1}+1)^2+(4c^3+1),$$

故 $p \mid (2a_{n-1}+1)^2$, 即: $p \mid 2a_{n-1}+1$.

同理, 从 $p \mid 2a_{n-1}+1$ 可得 $p \mid 2a_{n-2}+1$, …; $p \mid 2a_1+1$

故 $p \mid 2c+1$. $p \mid 2(4c^3+1)-(8c^3+1)=1$, 矛盾.

故 $(a_n^2+c^3,\ a_n^2+2a_n+1+c^3)=1$.

若 $a_k^2+c^3$ 为正整数的 m 次幂, 知

$a_{k-1}^2+c^3$ 也是, …; $a_1^2+c^3$ 也为正整数 m 次幂.

$$c^2(c+1)=t^m.$$

由$(c^2, c+1)=1$，知$c^2=t_1^m$，$c+1=t_2^m$，$t_1, t_2 \in N^*$.

若m为奇，$c=t_3^m$，$t_2^m-t_1^m=1$，与$m>1$矛盾.

若m为偶，$c=t_2^{2m_0}-1=r^2-1$

其中设$m=2m_0$，$r=t_2^{m_0}$，知$r\ge 2$.

而$c=r^2-1$，$r\ge 2$，$r\in N^*$时$a_1^2+c^3=(r^3-r)^2$是正整数2次幂.

从而c为：r^2-1，$r\ge 2$，$r\in N^*$.

4.（相略）

设$b_n=S_{n+1}-(n+1)a_n$，知$b_n\in\{-1,1\}$.

$n\ge 2$时，$S_n=na_{n-1}+b_{n-1}$

上式n，$n+1$求和，得：$a_{n+1}=(n+1)a_n+na_{n-1}+\delta_n$ ①

$\delta_n=b_n+b_{n-1}\in\{-2,0,2\}$.

不难验证 $a_1=675$，$a_2=2225$，从而 $n\geq 0$ 时，$a_n\geq 225$。

（由①式，a_{n+1} 比 $(n+1)a_n$ 大一些，比 $(n+2)a_n$ 小一点点

感觉 $\frac{a_{n+2}}{a_n}$ 可估到一个很小的范围）

引理1：$n\geq 4$ 时，$a_{n+2}=(n+1)(n+4)a_n$

证明：$a_n<(n+1)a_{n-1}$。

由①，$n\geq 4$ 时，

$$
\begin{aligned}
a_{n+2}&=(n+2)a_{n+1}+(n+1)a_n+S_n+1\\
&=(n+2)((n+1)a_n+na_{n-1}+S_n)+(n+1)a_n+S_n+1\\
&>(n+1)(n+3)a_n+na_n
\end{aligned}
$$

可估 $a_{n+2}<(n+1)(n+3)a_n+(n+2)a_n$，所有：

$a_{n+2}=(n+1)(n+3)a_n+(n+1)a_n=(n+1)(n+4)a_n$。

引理2：$n\geq 4$ 时 $a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n$。

引理3：$n\ge 1$时，$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n$.

回到原题。令$n=1$ $a_2=\frac{8}{3}a_1\in N^*$.

设$a_1=3C$，引理3归纳证$a_n=(n!)(n+2)C$.

又$|S_2-2a_1|=1$，故$a_0=C-1$或$C+1$.

$\{a_n\}$为：$a_0=C-1$，$n\ge 1$时$a_n=(n!)(n+1)C$，其中$C\ge 2025$.

或：$a_0=C+1$，$n\ge 1$时$a_n=(n!)(n+1)C$，其中$C\ge 2023$.

下课休息到11:56.

5. 假设四个实根$a, b, c, -(a+b+c)$.

韦达定理：
$$\begin{cases} 2P=ab+bc+ca-(a+b+c)(a+b+c) \\ -4=abc-(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ P^2-36=-abc(a+b+c) \end{cases}$$

从而 $-4p=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

由该式 $a+b, b+c, c+a$ 均偶.

设 $b+c=2u, \quad c+a=2v, \quad a+b=2w, \quad u, v, w$ 为整数.

知 $-p=u^2+v^2+w^2$

$$\begin{cases} a=-u+v+w \\ b=u-v+w \\ c=u+v-w \end{cases}$$

$$p^2-36=-(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)(u+v+w)$$
$$=u^4+v^4+w^4-2u^2v^2-2v^2w^2-2w^2u^2$$

而 $p=u^2+v^2+w^2$

$$p^2=u^4+v^4+w^4+2u^2v^2+2v^2w^2+2w^2u^2$$

从而 $u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=9.$

$(9,0,0), \quad (4,4,1).$

不难求出 $p=-10$, $q=0$. $x^4-20x^2+64=(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

四个整根.

$p=-6$ $q=\pm 16$. $x^4-12x^2+16x=x(x-2)^2(x+4)$

$x^4-12x^2-16x=x(x+2)^2(x-4)$.

均有四个整根.

综上条件 $(p,q)=(-10,0)$, $(-6,16)$, $(-6,-16)$

6. $a\mid b^2$. $a+1\mid b^2+1$.

知 $a(a+1)\mid b^2-a$

设 $b^2-a=da(a+1)$. d 非负整数.

$b^2\mid a^4$ 即: $d(a+1)+1\mid a^3$.

$a^3=m(d(a+1)+1)$.

模 $a+1$: $m\equiv -1 \pmod{a+1}$. $m=e(a+1)-1$ e 正整数.

$a^2-a+1=de(a+1)+(e-d)$

模 $a+1$. 设 $e-d=k(a+1)+3$.

知 $de=a-2-k$

若 $k\neq 0,-1$, 不难验证 $a-2-k\leq |k(a+1)+3|$

即: $de\leq |e-d|$

若 $d>0$, $|e-d|<\max\{d,e\}$ 矛盾.

$d=0$. $a=b^2$. $(a,b)=(t^2,t)$.

若 $k=-1$ 则 $de+e-d-1=0$ $e=1$. $d=a-1$.

知 $b^2=a^3$. $(a,b)=(t^2,t^3)$.

若 $k=0$. 则 $a=d^2+3d+2$. $b^2=(d+1)^4(d+2)$

故 $d+2$ 为完全平方数. $d=t^2-2$, $t\ge 2$.

得: $(a,b)=(t^2(t^2-1),\ t(t^2-1)^2)$

经检验, 均满足.

$(a,b)=(t^2,t)$, (t^2,t^3), $(t\ge 2)$ 或

$(t^2(t^2-1),\ t(t^2-1)^2)$ $(t\ge 2)$.

7. 设 $c(c^2-c+1)=pab$ ①

$a+b=q(c^2+1)$ ② $p,q\in N^*$.

不妨设 $a\le b$.

(要证 $a=c$, $b=c^2-c+1$. 如果 b 不等于 c^2-c+1. 至少差1.
比例上差不大, a 不等于 c. 至少差1. 误差比例上很大 消去 b)

②有: $b = q(c^2+1) - a$

知 $c(c^2-c+1) = p(aq(c^2+1) - a^2)$ ③

$$\ge aq(c^2+1) - a^2$$

$$\ge a(c^2+1) - a^2$$

$$= a(c^2 - a + 1)$$

$c(c^2-c+1) = pab \ge a^2$，知 $a^2 \le \frac{1}{4}(c^2+1)^2$

故 $a \le \frac{1}{2}(c^2+1)$. 不难证 $c \le \frac{1}{2}(c^2+1)$.

又 $c(c^2-c+1) \ge a(c^2-a+1)$，知 $a \le c$.

由③: $pa^2 = \underline{apq(c^2+1)} - c(c^2-c+1)$

注意到 $apq(c^2+1) > c(c^2-c+1) = (c-1)(c^2+1) + 1$.

知 $apq > c-1$. 所 $apq \ge c$.

进而 $pa^2 = apq(c^2+1) - c(c^2-c+1)$

$$= acpq + apq(c^2-c+1) - c(c^2-c+1)$$

$$\ge acpq.$$

故 $a \ge qc \ge c$, 又 $a \le c$. $q = 1$.

代入③, $p = 1$, $c = c^2-c+1$, 所证.

8. a、b、c 有2个相同显然无解. 下设两两不同.

只需考虑 $a>b>c$ 情形.

注意此时 b^a 相当大, a、b 较大时 a^b 远小于 b^a.

n^{n+1} 是 n^n 的 n 倍, $(n+1)^n$ 仅是 n^n 的约 e 倍.

引理: $n\in N^*$, 有 $2\le(1+\frac{1}{n})^n<3$.

引理的证明: 二项式定理. 知

$$又(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}$$

$$<1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\le 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<3, 所证.$$

由 $a^c+b^a+c^b=a^b+b^c+c^a<a^b+c^b+a^c$

知 $b^a < a^b + c^a$

$\frac{b^a}{c^a} > \left(\frac{c+1}{c}\right)^{c+2} > 2$，由引理.

$\frac{b^a}{a^b} = \frac{b^{a-b}}{\left(1+\frac{1}{a-1}\right)^b\left(1+\frac{1}{a-2}\right)^b\cdots\left(1+\frac{1}{b}\right)^b} > \left(\frac{b}{3}\right)^{a-b}$，由引理.

$b \geq 5$ 时，$\frac{c^a}{b^a} < \frac{1}{2}$，$\frac{a^b}{b^a} > \frac{1}{2}$，$a-b=1$，故 $b=5$.

$a^b < \frac{3}{5}b^a$，$c^a > \frac{2}{5}b^a$.

$4^6 > \frac{2}{5}\cdot 5^6$，$\left(1+\frac{1}{4}\right)^6 < \frac{5}{2}$，矛盾.

$b=4,3$ 不难讨论知无解.

$b=2$，$c=1$，$2^a = a^2 - a + 2$，$a=3$.

解为：$(1,2,3)$，$(1,3,2)$，(x,y,y) $x,y\in N^*$ 及其轮换.