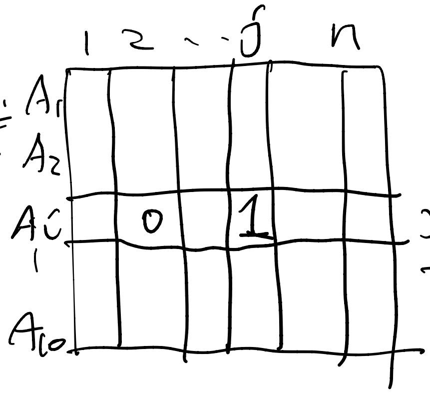
1 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A_i $(1\le i\le 10)$，$|A_i|=3$，$A_i\cap A_j\neq\emptyset$，每个元素至少属于一个，至多属于5个。

求 n 的可能值

对于这类，可用方格表描述



$j\in A_i$，$2\notin A_i$

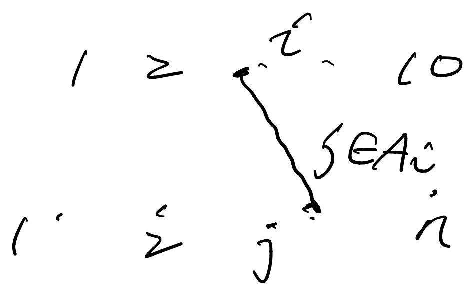
记第 i 行的 n 维向量 $(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})=\vec{x_i}$，则

$$|A_i\cap A_j|=\langle\vec{x_i},\vec{x_j}\rangle=x_1^{(i)}x_1^{(j)}+x_2^{(i)}x_2^{(j)}+\cdots$$

第 i 行 1 的数量 $=|A_i|$，第 j 列 1 的数记为 d_j，

则 (*)
$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{10}|A_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}d_j\\ \sum\limits_{1\le i<j\le 10}|A_i\cap A_j|=\sum\limits_{j=1}^{n}\binom{d_j}{2}\end{cases}$$
$=$ 对 (x,A_i,A_j)，其中 $x\in A_i\cap A_j$，$i<j$ 的数量

表格也对应一个二部图：



在该图中 i 的度 $=|A_i|$，j 的度 $=d_j$。

解：首先 $\sum\limits_{j=1}^{n}d_j=\sum\limits_{i=1}^{10}|A_i|=3\times 10$，$1\le d_j\le 5$

$\Longrightarrow$ $n\ge 6$。若 $n=6$，则 $d_j=5$。

n=7 的例子：取

$$\begin{cases}1,2,3\\1,4,5\\1,6,7\end{cases}$$

奇偶分组
$$\begin{cases}2,4,6\\2,5,7\\3,4,7\\3,5,6\end{cases}$$

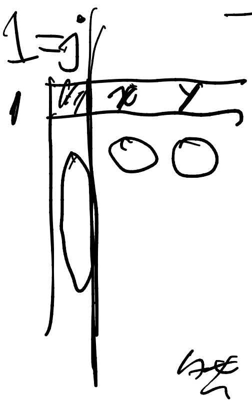
1,2,3
1,4,5
3,4,7

← 重复一些

(这中 A_i 允许相同)

n=6 也可举例

下面证明 $n\geq 8$ 不行. 首先不会发生 $d_j=1$：不妨 $j=1$



$j\in A_1$，考虑 $\{2,\dots,n\}$ 与 $A_2,\dots,A_n$. 由假设

$A_1\cap A_i=\phi \Rightarrow x\in A_i$ 或 $y\in A_i$ $(2\leq i\leq 10)$

则必有 d_x 或 $d_y\geq 5+1=6$ 矛盾!

然后再深入讨论 d_j 的分布，$d_j\in\{2,3,4,5\}$.

记 d_j 中有 x_i 个 i，$2\leq i\leq 5$. 则

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} d_j = 2\underbrace{x_2}_{=0}+3x_3+4x_4+\underbrace{5x_5}_{=20}=30 & ①\\ \sum_{j=1}^{n}\binom{d_j}{2} = x_2+3x_3+6x_4+10x_5 \geq \binom{10}{2}=45 & ②\end{cases}$$

$$x_2+x_3+x_4+x_5=n\geq 8 \quad ③$$

$x_2=0$
$x_5=3$.
$x_3+2x_4\leq 5$

① − ③ $\times 2$ $\Rightarrow$ $x_3+2x_4+3x_5\leq 30-16=14$ ④

$3x_3+4x_4=15$
$\Rightarrow \begin{cases}x_3=1,\ x_4=3 \text{ 不满足}\\ x_3=5,\ x_4=0\end{cases}$

$\Rightarrow x_5\leq 4$

若 $x_5=4$，$x_3+2x_4\leq 2$
$3x_3+4x_4=10$

$x_4=1, x_3=0$
$x_4=0, x_3\leq 2$

②$-$④$\times 3 \Rightarrow x_2+x_5 \geq 3$

若 $x_2 \neq 0$，不妨 $d_1=3$，$A_1=\{1,2,3\}$，则由 $A_1 \cap A_i \neq \phi$

$\Rightarrow A_i=A_1$ 或 $|A_3 \cap A_1|=2$ 或 $|A_3 \cap A_1|=1$，即 i 均为 A_1。（重新对其编号）

A_i 有如下3种：

i) $\{1,2,3\}\ \{1,2,3\}$

$\Downarrow$

对 $3 \leq i \leq 10$，$2 \in A_i$ 或 $3 \in A_i$

$\Rightarrow$ 2或3在 $A_3 \sim A_{10}$ 中至少出现4次

$\Rightarrow d_2$ 或 $d_3 \geq 6$，矛盾！

ii) $\{1,2,3\}\ \{1,2,4\}$

$\Downarrow$

对 $3 \leq i \leq 10$，$2 \in A_i$ 或 $\{3,4\} \subseteq A_i$

又2在 $A_3 \sim A_{10}$ 中至多出现3次，

从而5次包含 $\{3,4\}$

$\Rightarrow d_3, d_4 \geq 5+1=6$，矛盾！

iii) $\{1,2,3\}\ \{1,4,5\}$

同上 $A_3 \sim A_{10}$，含 $2,3$ 之一，从而 $d_2=d_3=5$，

含 $4,5$ 之一，从而 $d_4=d_5=5$

于是两个集合交均非空的三元子集有（2、3不同时出现，4、5也不同时出现）

$\{2,4,*\}_{=x}\ \{3,5,*\}_{=y}\ \{2,5,*\}_{=z}\ \{3,4,*\}_{=w}$

出现了 a 次 $\quad b$ 次 $\quad c$ 次 $\quad d$ 次

由 $d_2=5$ 同理 $\Rightarrow \begin{cases} a+c=4 \\ b+d=4 \\ a+d=4 \\ b+c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=d \\ a=b \\ a+c=4 \end{cases}$

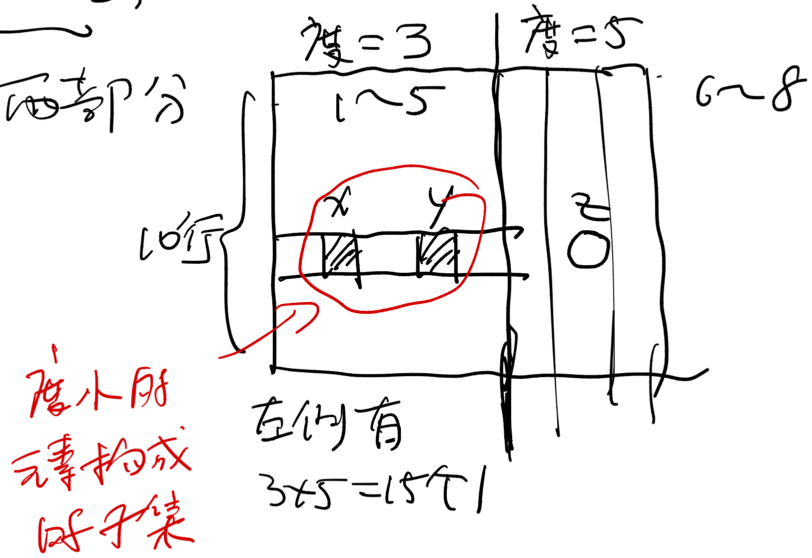
此时 $x_5 \geq 4$，从而 $x_5=4$，代入④ $\Rightarrow x_3+2x_4 \leq 2$

由 $x\cap y\neq\phi$ ⇒ x 和 y 中 * 相同，记为 u，同理 z 和 w 中 * 相同，记为 v.

又 $d_u+d_v\geq 8$ ⇒ $d_u=d_v=8$ ⇒ $x_4\geq 2$，矛盾！

若 $x_2=0$，则由 $x_2+x_5\geq 3$ ⇒ $x_5\in\{3,4\}$. 由不等式关系易知 $x_5\neq 4$，从而 $x_5=3$，结合不等式 ⇒ $x_3=5$，$x_4=0$.（此时必有 $n=8$）

将子集族分成两部分



从而必有 A_i 含 1~5 中至少两个元素，设为 $\{x,y,z\}$.
其它子集必有 x,y,z 之一，共有不超过 $2+2+4=8$ 个，矛盾！ $\boxed{\text{证}}$

附注：① $A_i\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，$i\leq n+1$，$|A_i|=3$，则必有某两个 A_i, A_j 满足 $|A_i\cap A_j|$ 为奇数.

（同型）② 偶数个人中必有两个，他们的公共朋友有偶数个.

例2. 已知正数 a_i 满足 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leq\frac{1}{2}$. 数组有形如

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\underline{1 \le x_i \le a_i}$，满足第二年的

$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 满足 $\boxed{\underline{y_i > x_i \text{ 至少有 } n-1 \text{ 次成立}}}$.

证：注意到条件对 $a_i = \underline{2^{k_i+1}}$ 满足，将 a_i 约化到

2 的幂次，设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$，$2^{k_i} \le a_i < 2^{k_i+1}$，

$\Downarrow$

$\frac{a_i}{2} < 2^{k_i} \le a_i$

则 $\underline{\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{k_i}}}} < 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \underline{\le 1}$.

（这是一个"密度"条件：给定 $A_i \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}$，$1 \le i \le n$.

记 $\lambda_i = \left|\frac{A_i}{N}\right|$（称为密度），则 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ne \{1, 2, \cdots, N\}$）

密度类似的常见例子为 $\underline{\bmod m}$ 的一个剩余类.

宣布年报的方式：每年取一个 i，让 $\boxed{x_i \to 1}$，其余的

$x \to \underline{x+1}$. 我们要在每个 x_i 碰到 a_i 之前（含）

将它变为 1，可用剩余类的性质：连续 m 个数中

一定有某个在给定的剩余类中.

构造一列 $\bmod 2^{k_i}$ 的剩余类 A_i，A_i 两两不交，则可如下

宣布年报：第 y 年，$\underline{y \in A_i}$ 则 $x_i = 1$，其余 $+1$.

由于 A_i 是 $\bmod 2^{k_i}$ 的剩余类，所以连续 2^{k_i} 年中必有

某年 $y \in A_i$，从而 x_i 不会超过 2^{k_i}.

下面构造剩余类，归纳构造：A_1 任取，设 $A_1 \sim A_{m-1}$ 已经取好，在 $\bmod 2^{k_m}$ 的剩余类中选。而每个 $\bmod 2^{k_i}$ 个剩余类对应 $2^{k_m-k_i}$ 个 $\bmod 2^{k_m}$ 的剩余类。由于

$$\sum_{i=1}^{m-1} 2^{k_m-k_i} = 2^{k_m}\sum_{i=1}^{m-1} 2^{-k_i} < 2^{k_m}$$，所以必有未出现的剩余类，任取之一为 A_m 即可。 $\square$

① 任给 $k \geq 2$，一定存在 $\underline{N(k)}$，满足：任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 均可表成

$$n = x_1^k + x_2^k + \cdots + \underline{x_{N(k)}^k} \quad 其 \ x_i \in \mathbb{N}.$$

$\underline{N(2)=4}$

② 若 $A \subseteq \mathbb{N}^*$，A 具有正密度 $\left(= \lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{|A\cap[1,2,\cdots,N]|}{N}\right)$

则 A 中有任意长的等差数列。

简单结论：$A \subseteq \mathbb{R}$. $B \subseteq \mathbb{R}$，则令 $A+B = \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$.

$a_1 < \cdots < a_k \qquad b_1 < b_2 < \cdots < b_l$

则 $\boxed{|A+B| \geq |A|+|B|-1}$

$a_1+b_1 < a_1+b_2 < \cdots < a_1+b_l$
$< a_2+b_l < \cdots < a_k+b_l$

（若 $A, B \subseteq \{0,1,\cdots,p-1 \pmod p\}$，右边修改为 $\min(|A|+|B|-1,\ p)$）

推论：若 A 的密度 $= \alpha < \frac{1}{2}$，则 $A+A$ 的密度 $\geq 2\alpha$.

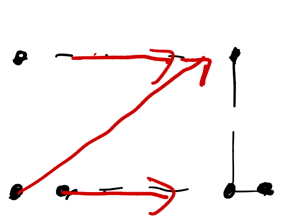
3. U 是向量集合（点集），令 $U-U=\{a-b\}$，则

$|U-U| \geq \ldots\ldots$

一维情况：$U\subseteq\mathbb{R}$，则 $|U-U|\geq 2|U|-1$：

例子取 $U=\{1,2,\ldots,k\}$，则 $U-U=\{1-k,\ldots,k-1\}$，共 $2k-1$ 个数.

二维情况：$|U|=k$ 分布在 $y=0$，$y=1$ 上，即形如



l 或 $l+1$ 个点

$k=2l$ 或 $2l+1$

$k=2l$

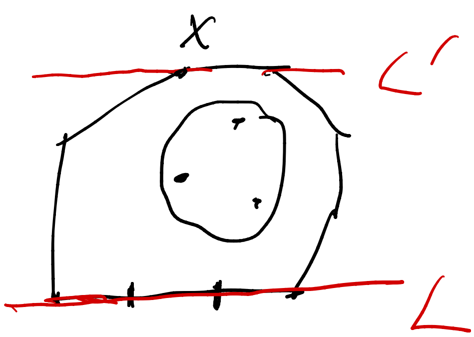
同层 $2l-1$ 个，不同层：$2(2l-1)$，共有 $6l-3=3k-3$ 个.

纵坐标 $=1$ 或 -1.

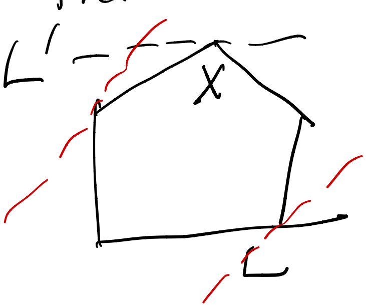
猜测：若 $|U|=k$，U 中点不共线时，$|U-U|\geq 3k-3$

$$\Rightarrow |U-U|\geq\begin{cases}3k-3, & k\text{偶}\\ 3k-2, & k\text{奇}\end{cases}$$

（注意到 $U-U$ 是中心对称且 $0\in U-U \Rightarrow |U-U|$ 为奇）



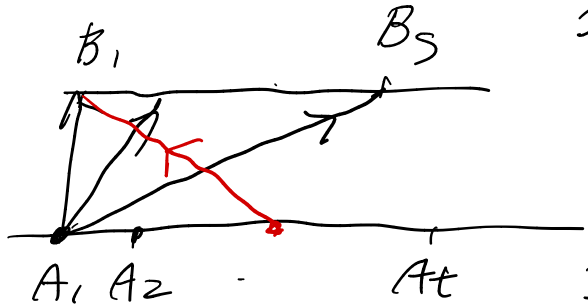
考虑 U 的凸包，任取一边 L，再取离 L 最远的 U 中点 X，过 X 作 L 的平行线 L'.



若 $u\subseteq L\cup L'$. 设 L 上有 t 个点, L' 上有 s 个点, 不妨 $t\geq s$ 且 $t\geq 2$

此时 $t+s=|u|\triangleq k$

记 L 上的点从左到右依次为 $A_1\sim A_t$, L' 上的点从左到右依次为 $B_1\sim B_s$. 考虑 $\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2},\cdots,\overrightarrow{A_1B_s},\overrightarrow{A_2B_s},\overrightarrow{A_3B_s},\cdots\overrightarrow{A_tB_s}$

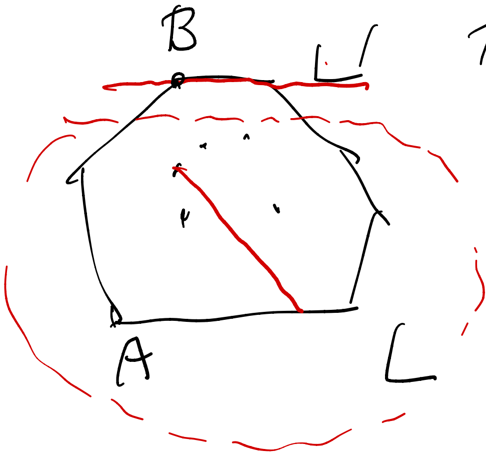


共 $s+t-1$ 个(横坐标)不同的向量. 它们的相反向量也有 $s+t-1$ 个.

再考虑 $\overrightarrow{A_iA_j}$ (一维情形), 共有至少 $2t-1$ 个(包含 $\vec{0}$), 则共有至少 $2(s+t-1)+2t-1\geq$

$2(s+t-1)+s+t-1=3k-3$.

下面再考虑一般的情形, 对 $|u|$ 归纳证明. 设在 $L\cup L'$ 之外有点, 令 $V=u\setminus L'$, 则 V 中点不全共线. 由归纳假设 $|V-V|\geq 3|V|-3=3(k-s)-3$, $s=|L'|$



注意到 $V-V$ 中向量 $|$纵坐标$|<y_B-y_A$,

从而它们与 $\overrightarrow{A_iB_j}$ 两两不同.

所以 $|u-u|\geq 3(k-s)-3+2(s+t-1)$

$=3k-3+\underline{2t-2-s}$, $t\geq s$, $t\geq 2$

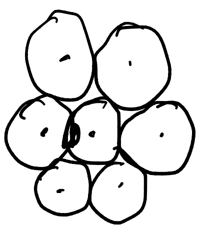
$\geq 3k-3$

例：对 $a=(a_1,\dots,a_n)$，$b=(b_1,\dots,b_n)$，记 $\delta(a,b)=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\dots,|a_n-b_n|)$，给定有限集 $A=\{(a_1,\dots,a_n),\dots\}$，记 $D(A)=\{\delta(a,a')\mid a,a'\in A\}$. 证明：

$$|D(A)|\ge|A|.$$

一维 + 归纳（取一些坐标最大的点）

二维：

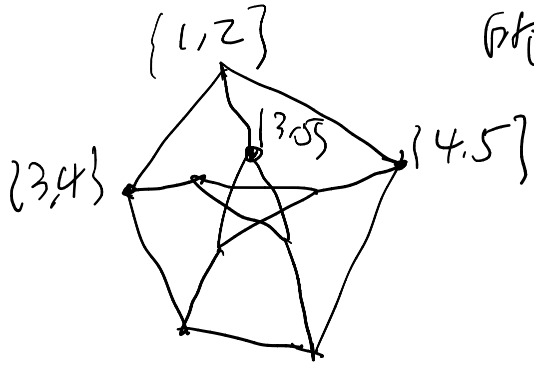


三维

4. 给定 n 阶简单图，问能否存在 $\{1,2,\dots,2014\}$ 的 n 个子集 $A_1\sim A_n$，满足 v_i,v_j 相邻 $\Leftrightarrow$ $A_i\cap A_j\ne\emptyset$. 求 n 的最大值.

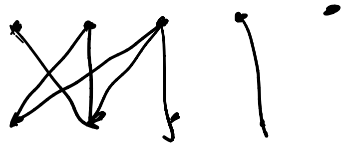
Kneser 图：给定子集族 $F=\{A_1,A_2,\dots,A_k\}$. 构造 k 个顶点的图；v_i-v_j 相邻 $\Leftrightarrow$ $A_i\cap A_j=\emptyset$

取 F = 5元子集的所有 2元子集，共 10 个. 对应的图为



$\Leftarrow$ 10 个点，无 K_3，无四边形，则 $|E|\le 15$.

解：考虑完全二部图：



$X \ni x$

$Y \ni y$

若对该图存在子集族 A_x, B_y 满足 $A_x \cap B_y \neq \emptyset$.

但 $A_x \cap A_{x'} = \emptyset = B_y \cap B_{y'}$. （$\emptyset$到$\emptyset$的映射？）

任取 $a_{xy} \in A_x \cap B_y$，则 a_{xy} 两两不同：

$\underset{A_x}{\underset{\cap}{a_{xy}}} = \underset{A_{x'}}{\underset{\cap}{a_{x'z}}}$，$x \neq x' \Rightarrow A_x \cap A_{x'} \neq \emptyset$，矛盾！

从而全集的元素个数 $\geq |X||Y|$，$|X|+|Y|=n$

此中全集 $=\{1,2,\dots,2014\}$.　　$45^2 = 2025 > 2014$　　45

从而 $n \leq 89$.　　$44\times 45 = \cancel{45\times 4}\times 11 = 180\times 11$

$= 1980 < 2014$.

下面证明 $n \leq 89$ 均可行，一般地证明：

任给 n阶图，一定可以构造出 $A_i \subseteq \{1,2,\dots,[\frac{n^2}{4}]\}$

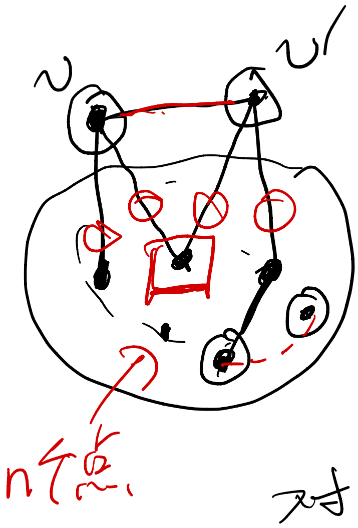
满足要求：v_i, v_j 相邻 $\Leftrightarrow A_i \cap A_j \neq \emptyset$

对 n 归纳，$n \to n+2$ 的归纳.

$n=1, 2$ ✓　　设 n 已证，考虑 $n+2$ 阶图.

若图无边 v：取 $A_i=\phi$ 即可.

任取一边 vv'，去掉 v, v'，对余下的 n 个点的子图
(诱导子图)



由归纳假设得到 A_i $(1\le i\le n)$，$A_i\subseteq$
$\{1,2,\dots,[\frac{n^2}{4}]\}$，$[\frac{(n+2)^2}{4}]=[\frac{n^2}{4}]+n+1$

初始时令 $A_v=A_{v'}=\{[\frac{(n+2)^2}{4}]\}$.

对每个 v_i $(1\le i\le n)$,

(i) v_i 与 v, v' 不相邻，不变

(ii) v_i 仅与 v (或 v') 相邻，在 A_i 与 A_v (或 $A_{v'}$) 中加入尚未使用的
$[\frac{n^2}{4}]+1\sim[\frac{(n+2)^2}{4}]$ 这 $n+1$ 个元素中的最小元 $\Rightarrow$ A_v与A_i相交

(iii) v_i 与 v, v' 均相邻，在 A_i, A_v, $A_{v'}$ 中均加入新元素.

按以上方法对 $A_1\sim A_n$ 逐步调整即可 (新元素有 n 个). □

5. 设 G 是 200 个顶点的有向图，每个点的出度 $=1$ $\Longrightarrow$ 边数 $=200$ $\Downarrow$ $|E|\le 200$

$\boxed{k\text{人不相邻}}$，求 k 的最大值.

给定无向简单图 $G=(V,E)$，若 $X\subseteq V$ 满足两两不相邻，

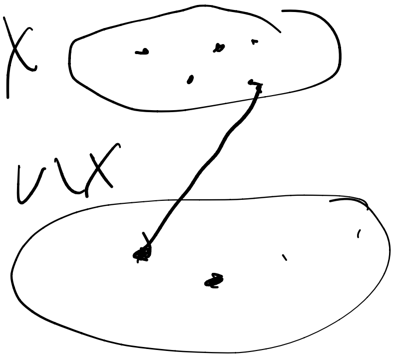
则称 X 是独立集. 则最大的独立集称为最大独立

集；若 X 是独立集，且不存在独立集 Y，满足 $X \subsetneq Y$，

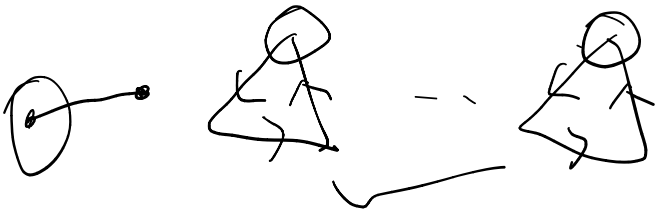
则称 X 是极大独立集.

性质：任给极大独立集 $X \subseteq V$，则 $V \setminus X$ 中的任何一点

都必向 X 中某点连边 $\Longrightarrow |E| \geq |V \setminus X|$



解：考虑例子：如图



$\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor = 66$

最大独立集元素个数 ≤ 67

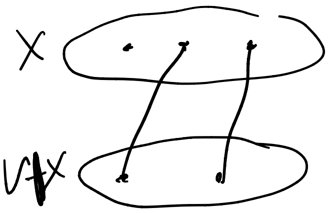
$= 67$.

下面证明：任给简单无向图 $G=(V,E)$，$|E| \leq 200$，$|V|=200$

则最大独立集至少 67 个点.

取最大独立集 X，设 $|X|=k$，由以上分析(极大性)知

X 与 $V \setminus X$ 之间至少有 $\underbrace{|V|-|X|}_{200-k}$ 条边.



再考虑 $V \setminus X$ 的诱导子图，估计其连通分支的个数，设 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ 为连通分支，由

X 的最大性 $\Rightarrow m \le k$.

由 Y_i 连通 $\Rightarrow$ Y_i 中至少有 $|Y_i|-1$ 条边，因此

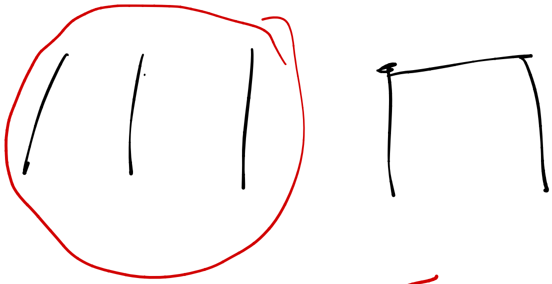
$V\setminus X$ 诱导子图中至少有 $\sum_{i=1}^{m}(|Y_i|-1) = \sum_{i=1}^{m}|Y_i| - m$，其中 $\sum_{i=1}^{m}|Y_i| = |U|-|X|$，$m \le k$

$\ge 200-k-k$

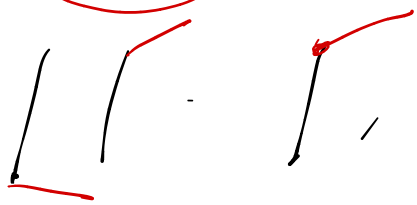
因此原图中至少有 $200-k+200-k-k$，由 $|E|\le 200$

$\Rightarrow 200-3k \le 0 \Rightarrow k \ge 67$. $\square$

独立集 $\xleftrightarrow{\text{对偶}}$ 匹配



类似地，对极大匹配



，其余的边必与其中某边相交.

6. $M=\{1,2,\dots,r\}$，A_i $(1\le i\le mn)$ 为 mn 个 m 元子集. 证明：存在 M 的划分 A, B，使 $A\cap A_i$, $B\cap B_i$ $(1\le i\le mn)$ 这 $2mn$ 个集合中至多有 $n-1$ 个为空集.

考虑对所有划分计数：$\sum_{(A,B)}\sum_{i=1}^{mn}|A\cap A_i||B\cap A_i|$

$\sum_{i=1}^{mn}|A\cap A_i||B\cap A_i|$ 中每一项 $\le m^2$，若其中有至少 n 项

为0，则该式 $\le m^2(mn-n)$.

记：对所有的划分(A,B)计算 $\sum_{(A,B)}\sum_{i=1}^{mn}|A\cap A_i||B\cap A_i|$

$$=\sum_{i=1}^{mn}\sum_{(A,B)}|A\cap A_i||B\cap A_i|$$

而 $\sum_{(A,B)}|A\cap A_i||B\cap A_i| = \sum_{i=1}^{m-1} i(m-i)\binom{m}{i}2^{r-m} =$

$|A\cap A_i| = i$，$|B\cap A_i| = m-i$

$$2^{r-m}\sum_{i=1}^{m-1}\cancel{i(m-i)}\frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)(m-i)}{\cancel{i!}\,(i-1)!}$$

$A_i=\{\underbrace{1,2,\cdots,m}_{i\text{个元素}}\cdots\underbrace{\cdots r-1,r}_{\text{若干}}\}$

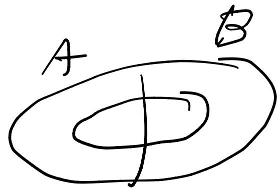
$$=2^{r-m}m(m-1)\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-2}{i-1}$$

$$=2^{r-m}m(m-1)2^{m-2}=2^{r-2}m(m-1)$$

从而 $\sum_{i=1}^{mn}\sum_{(A,B)}|A\cap A_i||B\cap A_i| = mn\cdot 2^{r-2}m(m-1)$. (*)

对于给定的(A,B)，若 $A\cap A_i$, $B\cap A_i$ 中至少n个空集，则

$$\sum_{i=1}^{mn}|A\cap A_i||B\cap A_i| \le \frac{m^2}{4}(mn-n)=\frac{m^2}{4}n(m-1).$$



所以 $\sum_{(A,B)}\sum_{i=1}^{mn}|A\cap A_i||B\cap A_i| \le \frac{m^2 n}{4}(m-1)\cdot 2^r$

与(*)对比，等号成立，即当 $A\cap A_i$，$B\cap A_i$ 非ϕ 非ϕ 时

$|A\cap A_i|=|B\cap A_i|=\frac{m}{2}$，而显然有不满足条件的

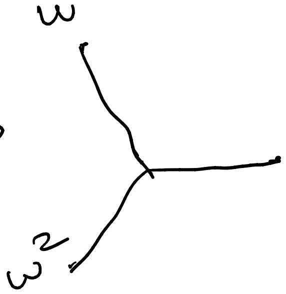
A_i, A, B，矛盾！ $\boxed{\text{m}}$

7. $M=\{z_i \mid z_i\neq 0, 1\le i\le n\}$, n 奇数，对 $A\subseteq M$. 记

② $S(A)$ 为 A 的元素之和，若 $|S(A)|$ 最大，A 最大.

模长

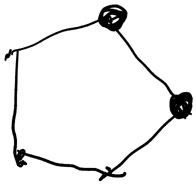
例子: $n=3$



$\{1\}$ $\{w\}$ $\{w^2\}$

以及补集 共 6个.

$n=5$

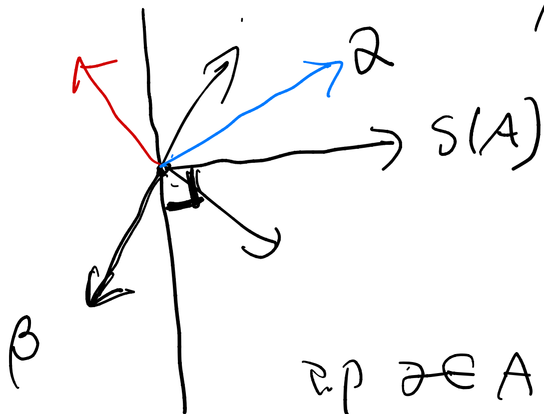


相邻点对以及补集，共10个

$\underset{\text{5对}}{\text{相邻点对}}$ ... $\underset{5}{\text{补集}}$

解：最大集至多有 $2n$ 个. 最大集任意~~添加~~元素或去掉元素后模长不会变大. [注意到] $\angle(u,v)\le\frac{\pi}{2}$ (非0)，则 $|u+v|>|u|$.

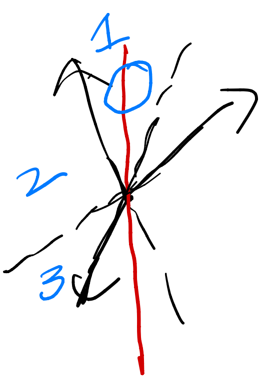
任给最大集 A，以 $S(A)$ 为法向作半平面，则 A 以外的复数必在半平面的另一侧，反之亦然：



若 $\alpha\notin A \Rightarrow |\alpha+S(A)|>|S(A)|$

若 $\beta\in A \Rightarrow |S(A)-\beta|>|S(A)|$

即 $\gamma\in A \Leftrightarrow \gamma$ 在半平面中，此时半平面中所有元素之和 $=\boxed{S(A)}$.



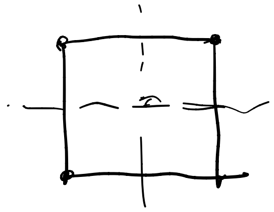
给定 n 个非0复数，它们所在直线将平面分成 $2n$ 个区域，形成 n对 对顶角.

每个对顶角区域决定两个半平面，共 $2n$ 个半平面，而最大集必来自于半平面，因此

至多有2n个.

例: 取正n边形的顶点, 每个半平面要么含连续的 $\frac{n-1}{2}$ 个点, 要么含连续的 $\frac{n+1}{2}$ 个点, 且 2n 个数模 k 均相等,

因此均为最大集.

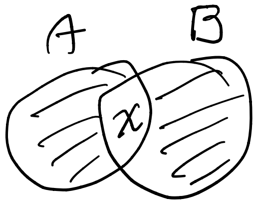


8. 将 $\{1,2,\dots,n\}$ 的全部 2^n 个子集排成一圈 $P_1, P_2, \dots, P_{2^n}$ 满足

$|P_i \triangle P_{i+1}| = k$, $1\le i\le 2^n$. k?

首先 $k<n$, 然后说明 k 必为奇数:

$$|A\triangle B| = |A|+|B|-2|A\cap B| \equiv |A|+|B| \pmod 2$$



若 $|P_i\triangle P_{i+1}| = k \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow |P_i| \equiv |P_{i+1}| \pmod 2$

矛盾!

用归纳法说明当 $k<n$ 为奇数时, 存在排列.

较简单的情况: 可将 A_i 排成一圈, 使 $|A_i\triangle A_{i+1}|=1$
$1\le i\le 2^n-1$

注意到 $\{1,2,\dots,n+1\}$ 的子集可分成 1) $\{1,2,\dots,n\}$ 的子集
2) 含 n+1 的子集

$A_1, A_2, \dots, A_{2^n}, A_{2^n+1-i}\cup\{n+1\}, \dots, A_1\cup\{n+1\}$ 首尾也满足.

一般的 k，① 第二部分等同于第一部分

② $k=n-1$ 对 $k=1$ "对偶"

无法归纳

$k=1$ 的特殊性：$|A\triangle B|=1 \Leftrightarrow A=B\cup\{*\}$ 或 $B=A\cup\{*\}$

考虑如下命题：$\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集可排成一圈 P_i $(1\le i\le 2^n)$ 满足

$|P_i\triangle P_{i+1}|=k$，且 $|P_1|=k-1$，$|P_{2^n}|=1 \Leftrightarrow P_{2^n}\not\subseteq P_1$

设 $\le n$ 已证，考虑 $n+1$ 的情形。首先考虑 $k\le n-1$，由归纳假设

设存在 $P_1\sim P_{2^n}$ 满足如上条件。新的排列形如

$P_1\sim P_{2^n}$，$Q_1\cup\{n+1\}$，$Q_2\cup\{n+1\}$，$\cdots$，$Q_{2^n}\cup\{n+1\}$，其中 Q_i

为 $P_1\sim P_{2^n}$ 的轮转。需验证：

$$\underbrace{|P_{2^n}}_{\{*\}}\triangle \underbrace{Q_1\cup\{n+1\}}_{k\text{个元素且}*\in Q_1}|=k,\quad |P_1\triangle \underbrace{Q_{2^n}}_{Q_{2^n}=\phi}\cup\{n+1\}|=k$$

将 $P_1\sim P_{2^n}$ 轮转满足 $Q_{2^n}=\phi \Rightarrow |Q_1|=k$

为了让 $P_{2^n}\subseteq Q_1$，再作一些调整。

当 $P_{2^n}\not\subseteq Q_1$，记 $P_{2^n}=\{a\}$，取 $b\in Q_1$，在 $P_1\sim P_{2^n}$ 中

将 a 与 b 对调，得到的新的序列记为 $R_1\sim R_{2^n}$，此时

$\boxed{P_{2^n}\subseteq R_1}$。

则 $P_1, P_2, \cdots, P_{2^n}, R_1\cup\{n+1\}, \cdots, \underbrace{R_{2^n}}_{\text{单元素}}\cup\{n+1\}$ 满足题中

$R_{2^n}=\phi$

要求.

考虑 $k=n<n+1$ 的情形, 此时 n 为奇数.

当 $|A\triangle B|=1$, $|A\triangle B^C|=|A\cap B|+|B^C\cap A^C|$ (*)

不妨设 $B=A\cup\{*\}$ $\quad = |A|+|B^C|=n$

$B^C\subseteq A^C$

取 $P_1\sim P_{2n+1}$ 为满足 $k=1$ 的排列, 考虑

$P_1, P_2^C, P_3, P_4^C, \ldots$, 由(*)知 $|Q_i\triangle Q_{i+1}|=n$.

$\;\,\shortparallel\quad\;\shortparallel$

$Q_1\;\; Q_2 \ldots$

注意 $|Q_1|=n+1$, $|Q_{2n+1}|=|P_{2n+1}^C|=n+1-P_{2n+1}=1 \Leftrightarrow P_{2n+1}=n$

$\;\;\shortparallel$

$|P_1|$

由 $|P_i\triangle P_{i+1}|=1$, 还需讨论转 化 $P_{2n+1}\supseteq P_1$ 且 $|P_{2n+1}|=n$.

$|P_1|=n-1$ 即可.

9. X_r 是 X 的 r 元子集全体, $F\subseteq X_r$ 满足任意 k 个交非空.

$I(F)=\min\{|T| \mid T\cap A\neq\emptyset, A\in F\}$. 证明:

条件T

$I(F)\leq\frac{r-1}{k-1}+1$

① 用F的条件构造满足条件的T

② $(I(F)-1)(k-1)\leq r-1$ ← 组合解释

挑的元素个数 $\quad$ 次数

任给 $1\le j\le k-1$，取 F 中 j 个子集 $A_1\sim A_j$，则

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_j$ 满足 T，由定义

$|A_1\cap\cdots\cap A_j|\ge I(F)$

$I(F)$ 极小，可知 $A_1\cap\cdots\cap A_j$ 的 $I(F)-1$ 元子集不满足条件 T.

取 $Y\subseteq A_1\cap\cdots\cap A_j$ 且 $|Y|=I(F)-1$，由 Y 不满足 T 知

存在 A_{j+1}，$Y\cap A_{j+1}=\emptyset\Rightarrow A_{j+1}\subseteq Y^c$

考虑 $A_1\cap\cdots\cap A_{j+1}$，$A_1\cap\cdots\cap A_j$，$Y$ 的关系：

猜测 $|A_1\cap\cdots\cap A_j|-|A_1\cap\cdots\cap A_{j+1}|\ge|Y|$. (1)

事实上 $|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{j+1}|\le|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_j\cap Y^c|$

$$=|A_1\cap\cdots\cap A_j|-|Y|.$$

对 (1) 在 $j=1,2,\cdots,k-1$ 求和 $\Rightarrow$

$$\underbrace{|A_1|}_{=r}-\underbrace{|A_1\cap\cdots\cap A_k|}_{\ge 1}\ge(k-1)(I(F)-1)$$

即 $(I(F)-1)(k-1)\le r-1$.

问题：给定 $3\le k<n$，F 是由一些 $k-1$ 元子集构成的子集族，

当 $|F|\ge$? 时，F 中存在 k 个 $k-1$ 元子集，它们的并集是

k 元集合？

10. 2k名旅客，k个房间，求k的最大值.

每人要与2k-2个些人在两次派对中，而每次派对对每人而言均会与k-1人相遇，∴而每人均需参加

$$\frac{(2k-2)\times 2}{k-1}=4$$

∴而派对必为8天. 将每个房间中两人记为a与b.

第一个房间的8天情况不妨为

~~a~~	~~a~~	~~a~~	~~a~~
a	a	b	b
a	b	a	b
a	b	b	a
b	a		
b	a		
b	b		
b	b		

不妨第一列为a~a，b~b，第一行全是a. 第2~4行只有3种可能 abb, bab, bba，若k≥8，则后7列中必有3个已同一类型. 不妨为abb 即如下.

a	a	a	a
a	a	a	a
a	b	b	b
a	b	b	b
b	a	b	b
b	a	b	b
b	b	a	a
b	b	a	a

调整顺序可使第二列的后4行为aabb. 比较第2列与第3列

同理比较2-4列 ⇒ 如左图

则3,4列有矛盾!

$n=7$ 例子 接到可得

将每列视为8维向量，$a=1, b=0$，则对任何两列 $u=(u_1,\dots,u_8)$，$v=(v_1,\dots,v_8)$。由条件 $\sum_{i=1}^{8} u_i v_i=2$，$\sum_{i=1}^{8} u_i(1-v_i)=2$，

$\sum_{i=1}^{8}(1-u_i)v_i=2$，$\sum_{i=1}^{8}(1-u_i)(1-v_i)=2$. $\to r$

一般情况：将2次 $\Rightarrow$ r次，则有 $4r$ 次派对. 求 k 的最大值.

11. 轮换对称性（数论方式）（令 n 名选手，编号为 $0\sim n-1 \pmod n$）

$T\subseteq\{0,1,\dots,n-1 \pmod n\}$，可要求 i 与 j 比赛 当且仅当

$i-j \pmod n \in T$.　(i,j) 比赛 $\Rightarrow$ $(i+s, j+s)$ 比赛

例如：存在 $\{1,2,\dots,13\}$ 的 13 个 3元子集 A_i 满足

$|A_i\cap A_j|=1$，$i\neq j$

题中 $(n,6)=1$ $\Rightarrow$ $\bmod n$ 的完全剩余类 $a_1\sim a_n$，则

$2a_1\sim 2a_n$，$3a_1\sim 3a_n$ 均遍历.

将 n 对夫妻记为 (h_i, w_i) $0\le i\le n-1$. 由条件每场比赛形如

$\{h_i, w_k\}$ 对 $\{h_j, w_l\}$，其中 $k\neq i,j$，$l\neq j,i$

给 i,j 遍历；k,l 遍历 i,j 以外.

下面对 (i,j) 指出确定的 k,l. 考虑 $i\neq j$，$2i\neq j \pmod n$

$2i-j\neq j, i$

令 $k=2i-j$，$l=2j-i$，则 $k\neq i,j$，$l\neq j,i$

验证题中条件！(a) h_i, h_j ✓；给定 k,l.

由解出 $\begin{cases}2l+k=3j \pmod n\\ 2k+l=3i \pmod n\end{cases}$，该方程组 $\begin{cases}2l+k=3i\\ 2k+l=3j\end{cases}$

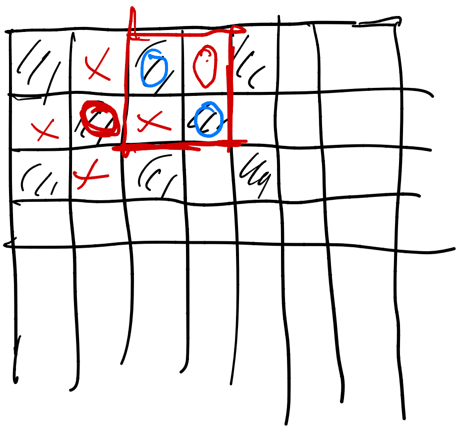
恰有一个满足 $i<j$ (取 $0\sim n-1 \pmod n$).

(b) 给定 h_i，u_l $(l\neq i)$ 解出 $2j=l+i$.

该方程组 $i\Leftrightarrow j$，即 $2i=l+j$ 恰有个满足 $i<j$.

综上构造成立.

12. 10×10 → 更小的方格表



考虑 2×2 方格，共有 25个.

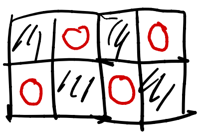
每个 2×2 的方格中有两个不同色.

$\sum_{i=1}^{25} x_i = 46$，$x_i\le 2$，从而

x_i 中至少有 21个2，必有11种同色，

即有22格.

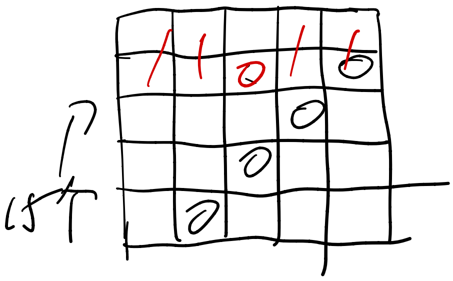
再考虑这些 2×2 方格的相邻.



对于那些 $x_i=2$ 且相邻的 2×2 方格，它们中被选出的同色.

还需说明 $x_i=2$ 的方格构成的图中必有连通分支 ≥ 15 个 2×2.

即 5×5 的对角表中去掉 4个，必有连通分支 ≥ 15个.



若仅有一空行，则它所在连通分支至少有 5+4+3+2+1=15 格

若有 ≥2 空行，类似讨论.

$\square$