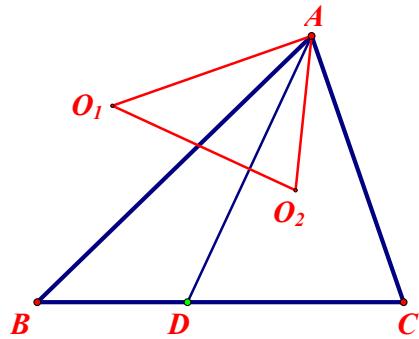


平面几何讲义

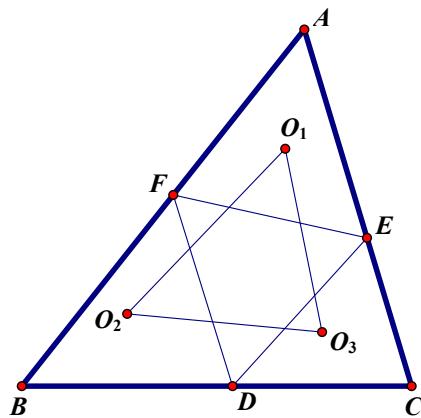
叶中豪 (老封)

例题和习题

1. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上任意一点, O_1 、 O_2 分别是 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的外心。
求证: $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$ 。 (TSD106)

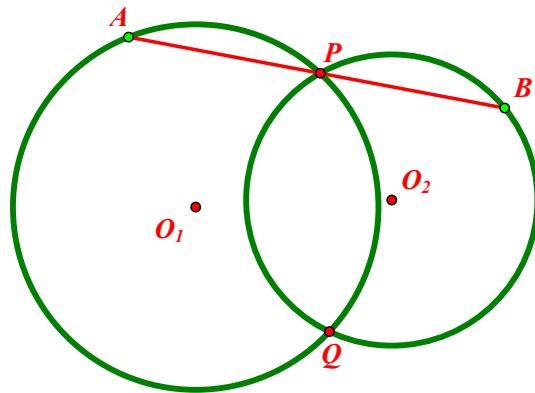


2. 已知: 点 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 边上, O_1 、 O_2 、 O_3 分别是 $\triangle AEF$ 、 $\triangle BFD$ 、 $\triangle CDE$ 的外心。求证: $\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle ABC$ 。 (TSD109-2)



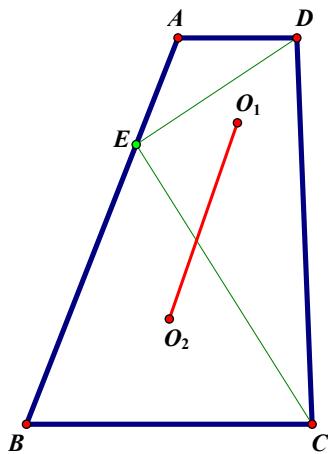
3. 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于 P、Q 两点，过 P 作割线 AB 分别与两圆相交于 A、B。

问：何时 AB 的长度最大？ (LY057)

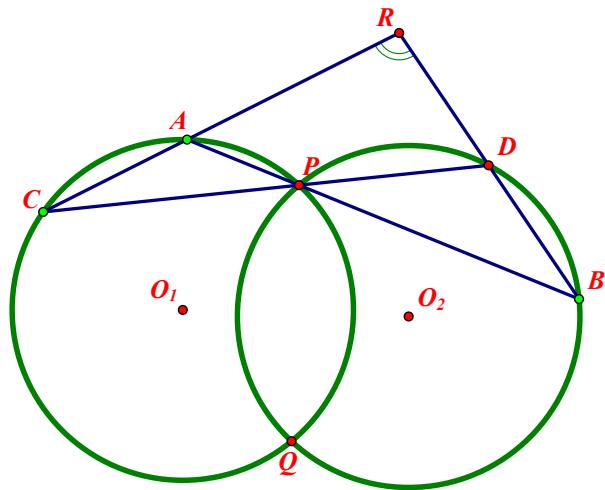


4. 已知 ABCD 是梯形 ($AD \parallel BC$)，E 是腰 AB 上的动点， O_1 、 O_2 分别是 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCE$ 的外心。求证： O_1O_2 的长度不随 E 点的运动而变化。 (2002 年第 2 届西部竞赛题)

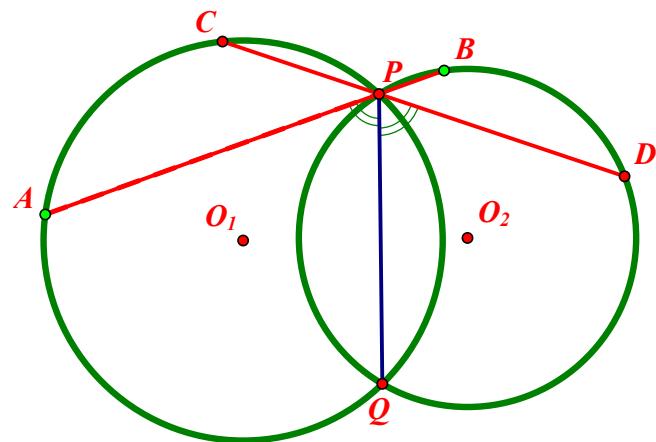
(TSD108)



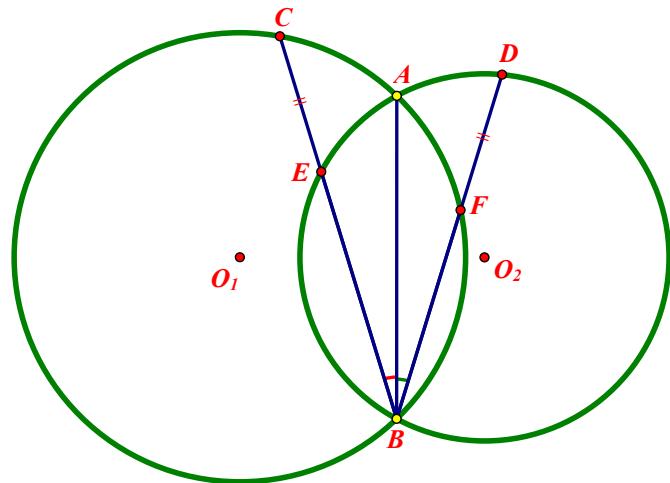
5. 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于P、Q两点，过P作两条割线AB、CD，分别与 $\odot O_1$ 交于A、C，与 $\odot O_2$ 交于B、D。求证：直线AC和直线BD的夹角是与割线位置无关的定值。**(LY063)**



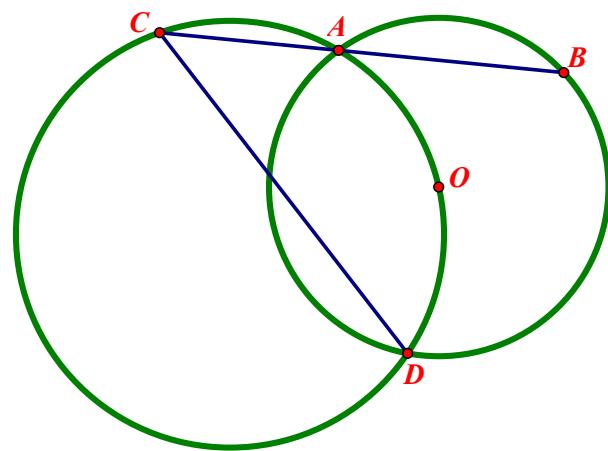
6. 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于P、Q两点，过P作两条割线AB、CD，分别与 $\odot O_1$ 交于A、C，与 $\odot O_2$ 交于B、D。求证： $AB = CD$ 。**(LY070-1)**



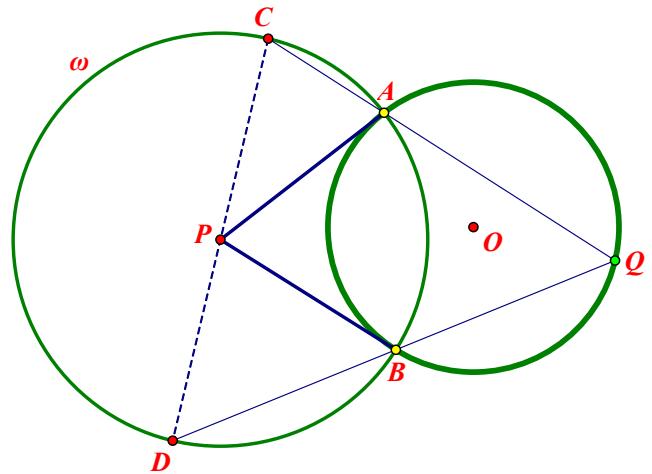
7. 如图, 两圆 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点, $\odot O_1$ 的弦 BC 交 $\odot O_2$ 于 E, $\odot O_2$ 的弦 BD 交 $\odot O_1$ 于 F。求证: (1) 若 $\angle CBA = \angle DBA$, 则 $CE = DF$;
 (2) 若 $CE = DF$, 则 $\angle CBA = \angle DBA$ 。(1979 年全国联赛) (LY070-2)



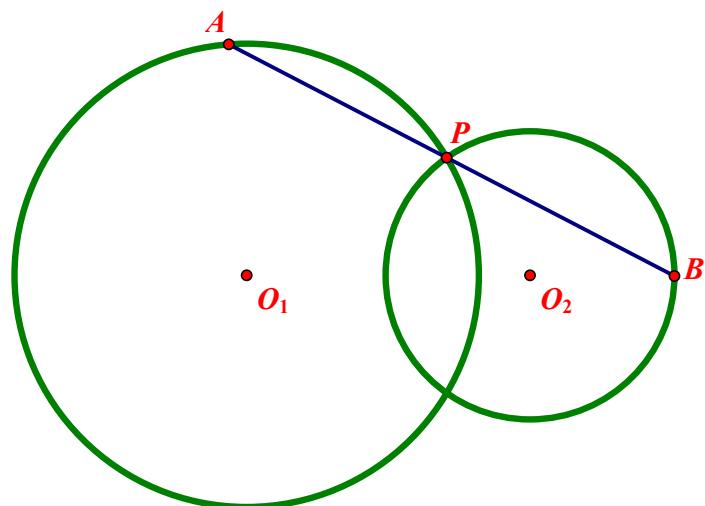
8. 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, 过 A、O 两点任作一圆交 BA 的延长线于 C, 与 $\odot O$ 交于 D 点。求证: $CB = CD$ 。(LY061)



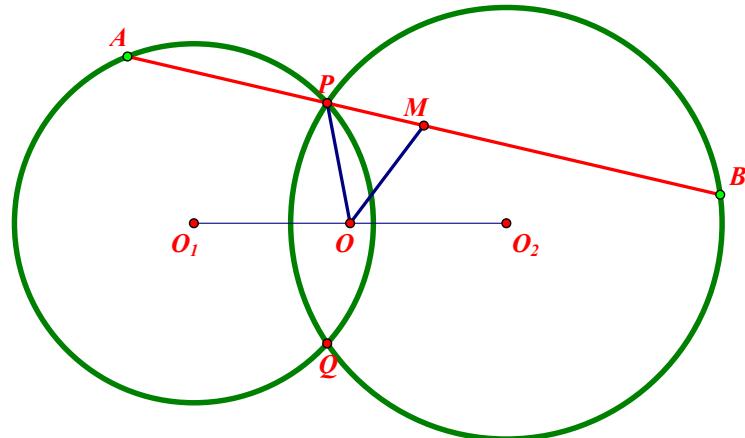
9. 如图, PA 、 PB 是 $\odot O$ 的切线, 以 P 为圆心, PA 为半径作圆 ω , Q 是 $\odot O$ 上任一点, QA 、 QB 交 ω 于 C 、 D 。求证: C 、 P 、 D 三点共线。 (LY087-1)



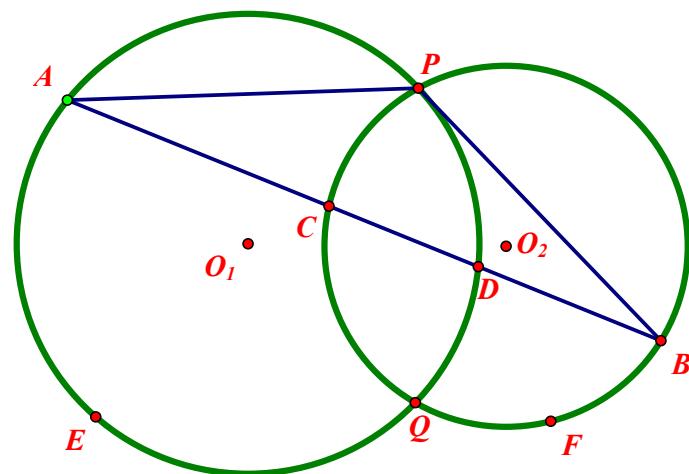
10. 设 P 是 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 的交点。过 P 求作割线 AB , 使得 $AP = BP$ 。 (LY072)



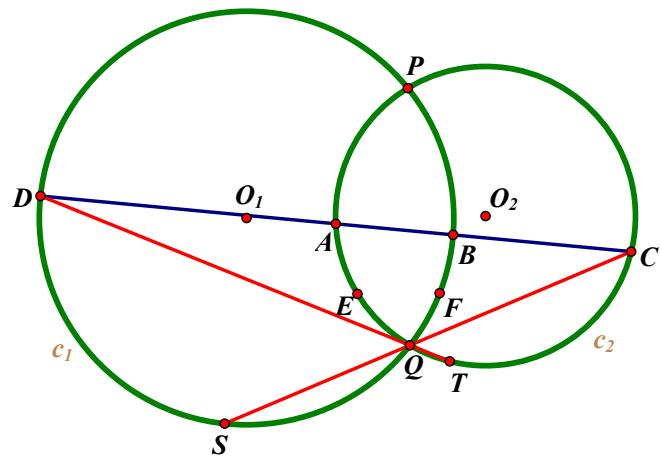
11. 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于P、Q两点，过P作割线AB分别与 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相交于A、B，联结 O_1O_2 ，M、O分别是线段AB、 O_1O_2 的中点。求证： $OP = OM$ 。 (LY071)



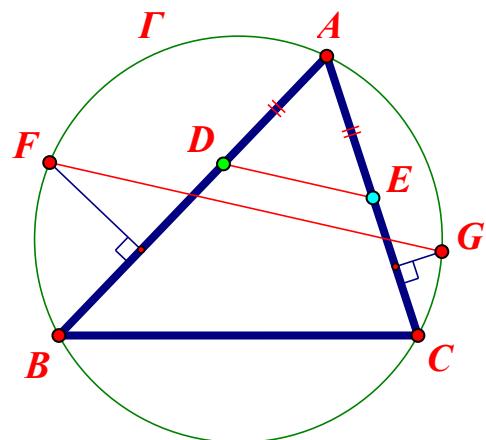
12. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于P、Q两点，A、B分别在 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 上，且 $PA = PB$ ，联结AB分别交两圆于C、D，取弧AQ和弧BQ的中点E、F。求证：C、D、F、E四点共圆。 (LY075-1)



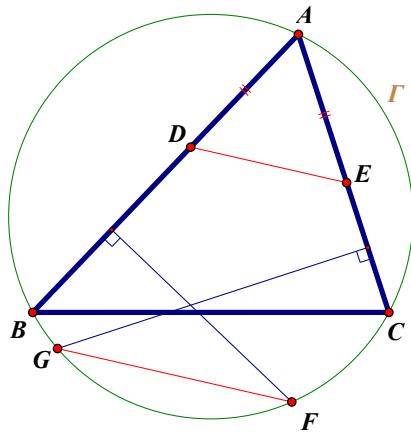
13. 两圆 c_1 、 c_2 交于 P 、 Q ，过 Q 的一条直线分别交 c_1 、 c_2 于 S 、 C ，过 Q 的另一条直线分别交 c_1 、 c_2 于 D 、 T ， CD 分别交 c_1 、 c_2 于 B 、 A ， E 、 F 是弧 QA 、 QB 的中点， $CS = DT$ 。求证： C 、 D 、 E 、 F 共圆。（2010 年全国数学冬令营）(LY075-2)



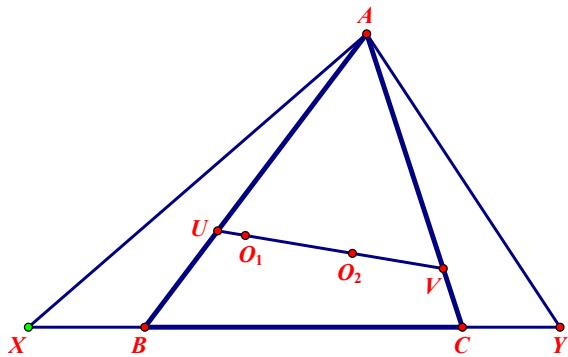
14. 设 Γ 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆。点 D 和 E 在线段 AB 、 AC 上，使得 $AD = AE$ ， BD 和 CE 的垂直平分线和 Γ 上劣弧 AB 、 AC 分别交于点 F 、 G 。求证：直线 DE 和 FG 重合或平行。（2018 年 IMO 第 1 题）(YU407-1)



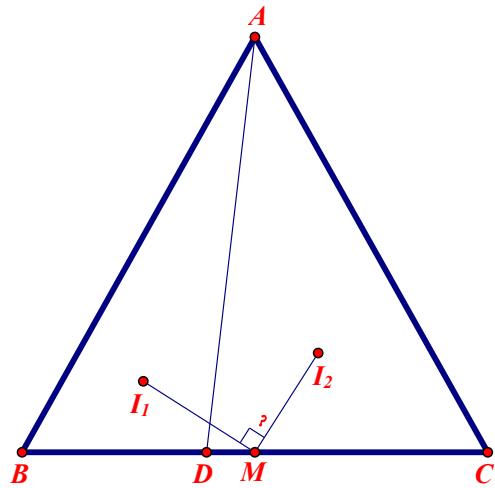
15. 设 Γ 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆。点 D 和 E 在线段 AB 、 AC 上，使得 $AD = AE$ ， BD 和 CE 的垂直平分线和 Γ 上优弧 ACB 、 ABC 分别交于点 F 、 G 。求证：直线 DE 和 FG 重合或平行。（YU407-2）



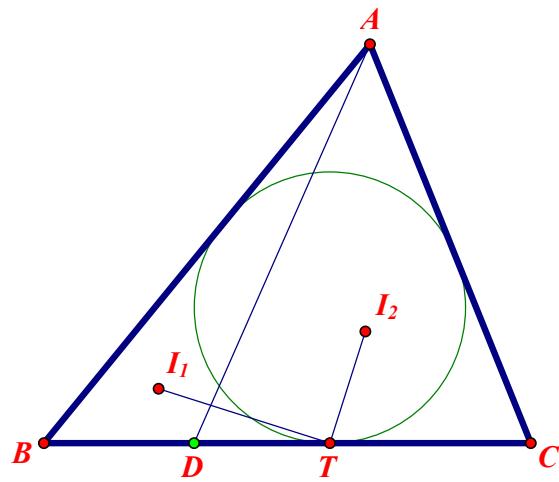
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， X 、 Y 是直线 BC 上两点（ X 、 B 、 C 、 Y 顺次排列），使得 $BX \cdot AC = CY \cdot AB$ 。设 $\triangle ACX$ 、 $\triangle ABY$ 的外心分别为 O_1 、 O_2 ，直线 O_1O_2 与 AB 、 AC 分别交于点 U 、 V 。求证： $\triangle AUV$ 是等腰三角形。（2016 年全国高中联赛）(TSD127)



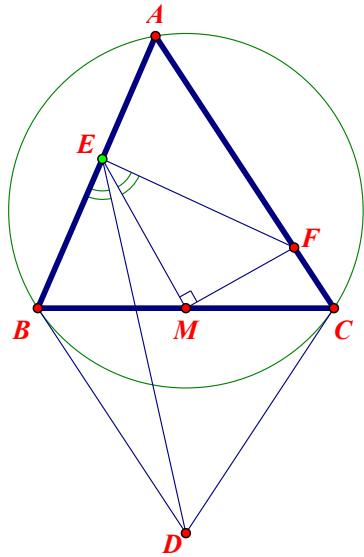
17. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, M 为 BC 中点, D 在 BC 上异于 M , I_1 、 I_2 分别为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 内心。求证: $I_1M \perp I_2M$ 。 (ZH207-1)



18. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点, I_1 、 I_2 分别是 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的内心, $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 切于 T 点。求证: $\angle I_1TI_2 = 90^\circ$ 。 (ZH207-2)



19. $\triangle ABC$ 外接圆在 B、C 处切线交于 D, M 是 BC 中点, E、F 分别在 AB、AC 上, $ME \perp MF$ 。求证: $\angle BED = \angle MEF$ 。 (DJ055-1)



20. 四边形 ABCD 中, $BC = DC$, M 是形内一点, $BM = DM$, $\angle BMD + \angle C + 2\angle A = 360^\circ$, E、F 分别在 AB、AD 上, 且 $\angle EMF = \frac{1}{2} \angle BMD$ 。求证: $\angle BEC = \angle MEF$ 。 (DJ055-2)

