2024年江苏省暑期学校@解析几何

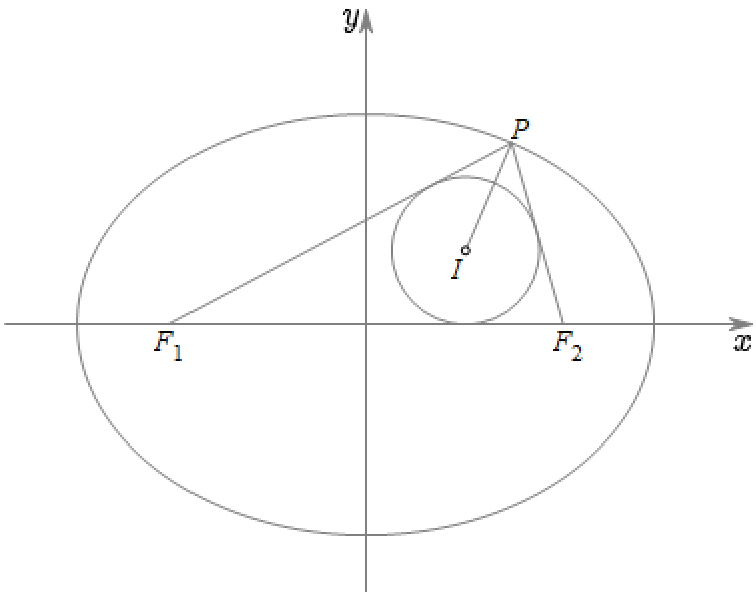
VectorAB@jiuzhangzaixian.com

一、几何属性指引代数运算

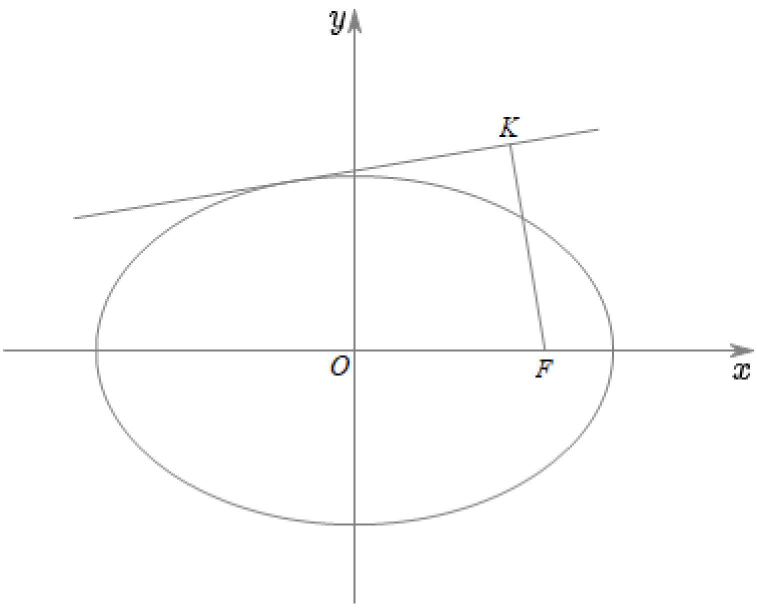
1. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 Γ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，P 在椭圆 Γ 上，I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心.

（1）若椭圆 Γ 的短轴长为 30，$\angle F_1PF_2=60^\circ$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积；

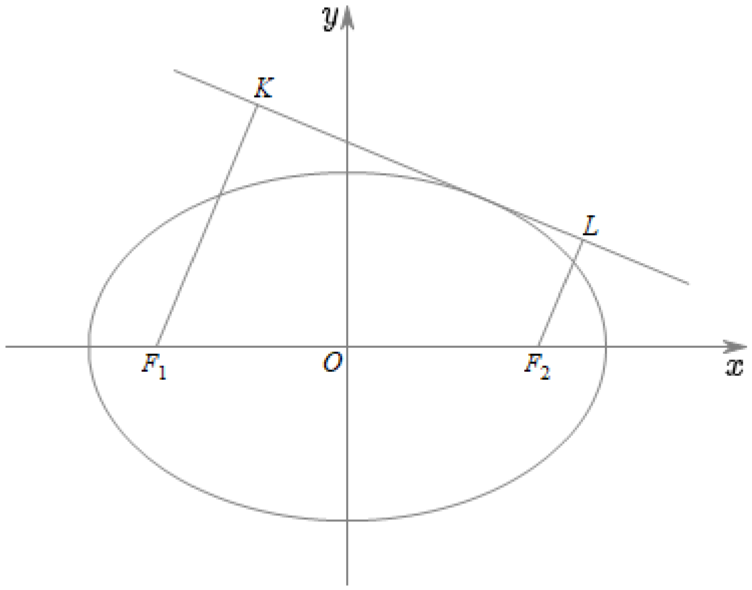
（2）记直线 PF_1，PF_2 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $4k_1k_2-3(k_1+k_2)=4$，求直线 PI 的斜率.



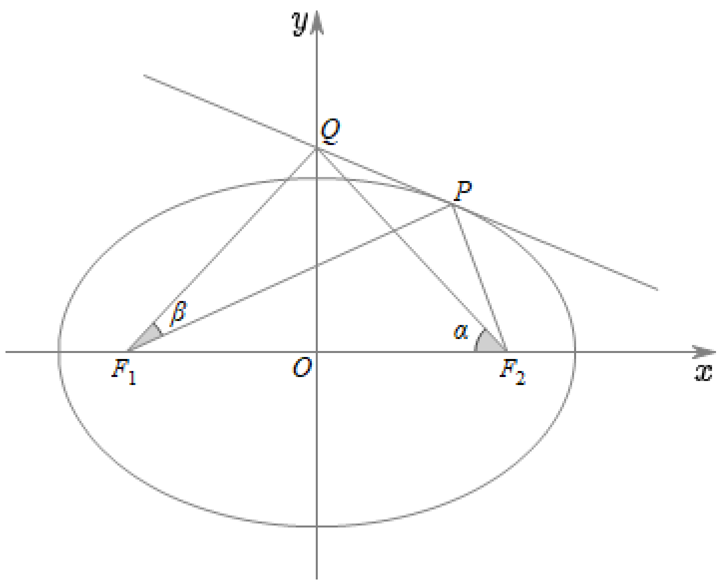
2. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与椭圆 Γ 相切于，Γ 的右焦点 F 在 l 上的射影为 K，求点 K 的轨迹.



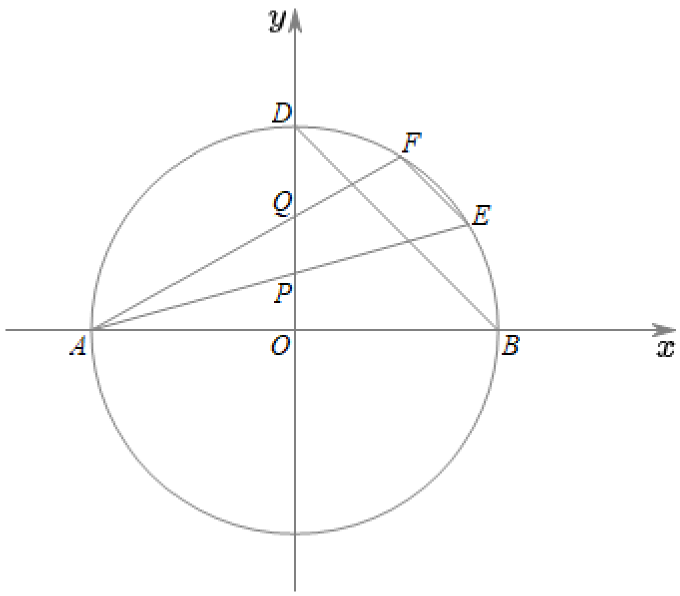
3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{4096}+\dfrac{y^2}{2025}=1$ 的左右焦点分别为 F_1， F_2，直线 l 与椭圆 Γ 相切，记 F_1， F_2 到直线 l 的距离分别为 d_1， d_2，求证：d_1d_2 为定值.



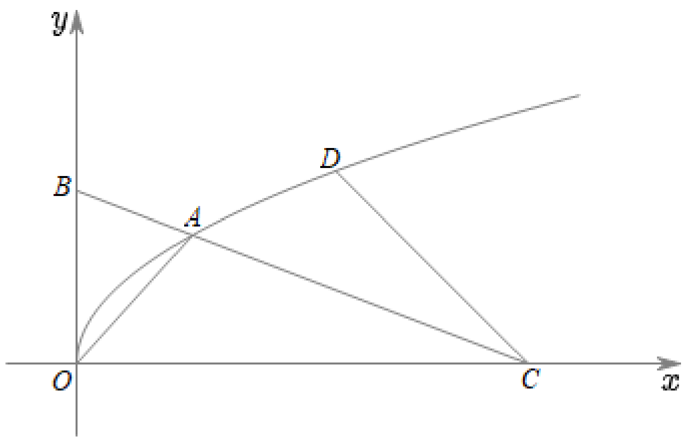
4. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 Γ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，椭圆 Γ 在点 P 处的切线与 y 轴交于点 Q，记 $\angle QF_2F_1=\alpha$， $\angle PF_1Q=\beta$，求椭圆 Γ 的离心率（用含 α， β 的表达式表示）.



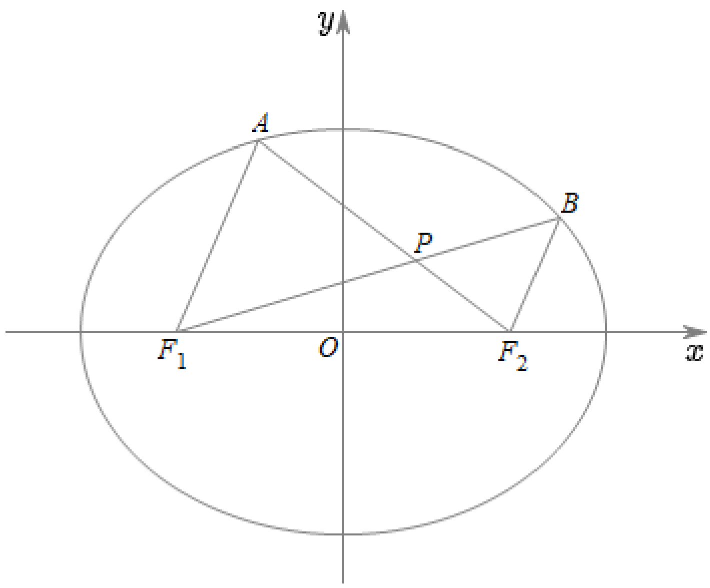
5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点(其中点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴正半轴的交点为 D . 若 E 、 F 是圆 O 上第一象限内的点，直线 AE 、 AF 分别与 y 轴交于点 P 、 Q ，若点 P 是线段 OQ 的中点，且直线 $EF//BD$ ，求直线 AE 的斜率.



6. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以原点为圆心的圆 O 分别与曲线 $\Gamma: y^2=2x(y\geqslant 0)$ 和 y 轴的正半轴相交于点 A 与点 B . 直线 AB 与 x 轴相交于点 C ，记点 A 的横坐标 a ，曲线 Γ 上点 D 的横坐标为 $a+2$ ，求证：直线 CD 的斜率为定值.

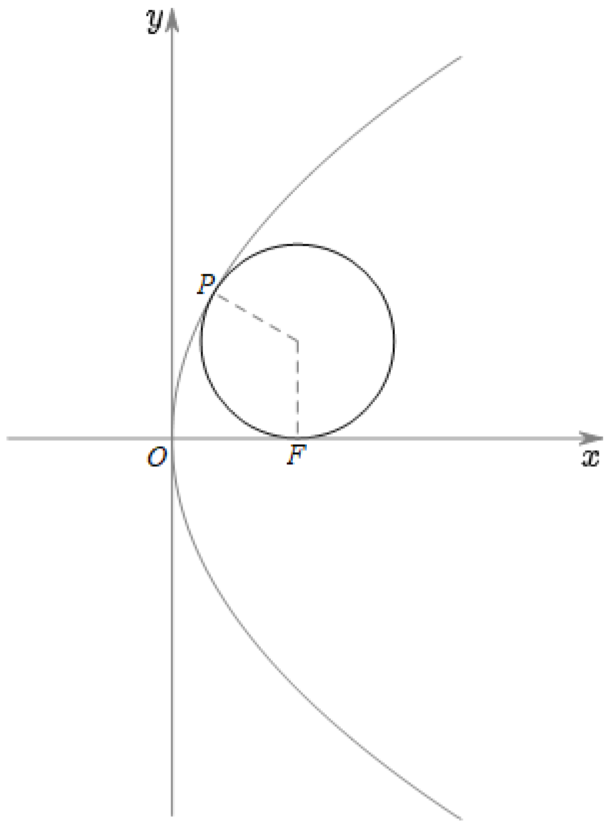


7. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1， F_2，过 F_1， F_2 引两条平行射线分别与椭圆 Γ 交于点 A， B，记 AF_2 与 BF_1 的交点为 P，求证：PF_1+PF_2 为定值.

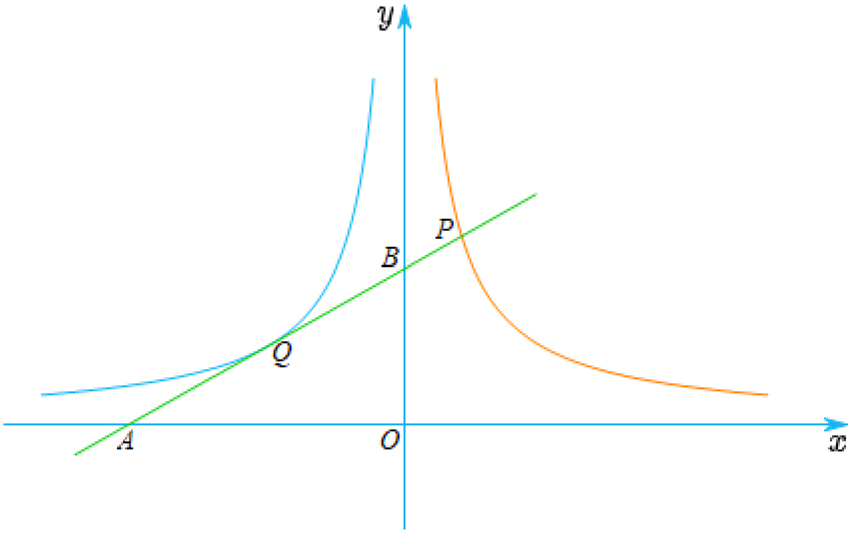


二、代数运算助力探索几何属性

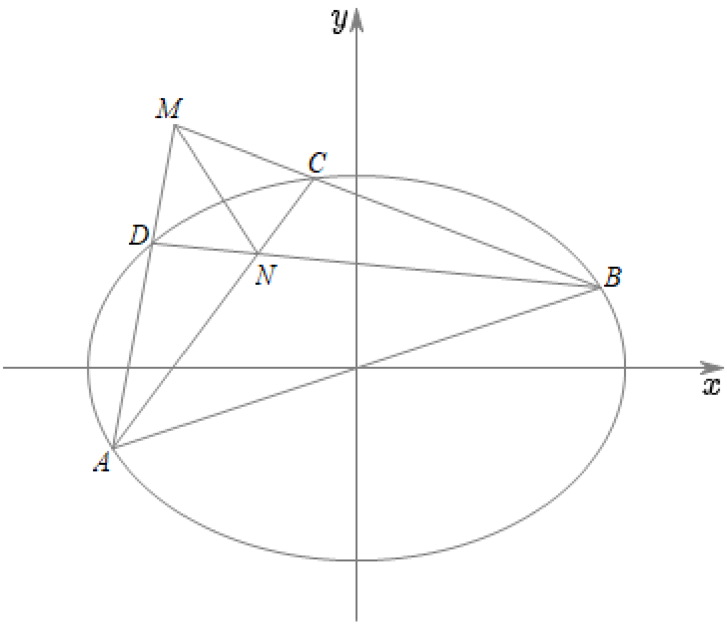
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2=2px(p>0)$ 恰有一个公共点 P，且圆 Ω 与 x 轴相切于 Γ 的焦点 F，求圆 Ω 的半径.



9. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 的图象为 Γ．设 Γ 上的两点 P，Q 满足：P 在第一象限，Q 在第二象限，且直线 PQ 与 Γ 位于第二象限的部分相切于点 Q，求 $|PQ|$ 的最小值.



10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A$，$B$，$C$，$D$ 是椭圆 Γ 上的点，且 A，B 关于原点对称，$AC\cap BD=N$，$AD\cap BC=M$，求证：$k_{MN}\cdot k_{AB}$ 为定值.



11. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，斜率为 k 的直线 l 经过点 $P(m,n)$，且与椭圆 Γ 交于 A， B，求 $|PA|\cdot|PB|$（用含 k， m， n 的表达式表示）.