江苏省数学竞赛夏令营讲义0709（上）组合计数

编写：李伟

一. 组合计数中的四个基本原理

1. 对应原理: 对于两个集合 A 和 B ,若存在一个由 A 到 B 的一一映射,则 $Card\left(A\right)=Card\left(B\right)$.

2. 加法原理： 做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，⋯ ，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ 种不同方法.

定理： 设 A 和 B 为有限集合，且 $A\bigcap B=\Phi$ ，则 $\left|A+B\right|=\left|A\right|+\left|B\right|$.

推论： 设有 n 个有限集合 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 满足 $S_i\bigcap S_j=\phi(1\le i\ne j\le n)$ ，则

$$\left|S_1+S_2+\cdots+S_n\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|S_i\right|.$$

问题探究 1: 在所有的 6 位二进制数中，至少有连续 4 位是 1 的有多少个？

3. 乘法原理： 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，⋯⋯，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\ldots\times m_n$ 种不同的方法.

定理： 设 A 和 B 为有限集合，且 $A\bigcap B=\Phi$ ，则 $\left|A\times B\right|=\left|A\right|\times\left|B\right|$.

推论：设有 n 个有限集合 $S_1,S_2,\ldots,S_n$ 满足 $S_i\bigcap S_j=\phi(1\le i\ne j\le n)$ ，则

$$\left|S_1\times S_2\times\cdots\times S_n\right|=\prod_{i=1}^{n}\left|S_i\right|.$$

问题探究 2: 已知 $n=7^3\times11^2\times13^4$,求 n 的所有正因子个数.

备注：区分两个原理的口诀：加法原理，类类独立；乘法原理，步步相关。

4.容斥原理: 令 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数，

则 $\left|\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right|=\sum_{1\le i\le m}\left|A_i\right|-\sum_{1\le i<j\le m}\left|A_i\bigcap A_j\right|+\sum_{1\le i<j<k\le m}\left|A_i\bigcap A_j\bigcap A_k\right|-\ldots+\left(-1\right)^{m-1}\left|A_1\bigcap A_2\bigcap\ldots\bigcap A_m\right|$.

二. 排列与组合：

排列与组合是组合计数的基础，如果考虑的对象与顺序有关，则称之为排列问题，
如果考虑的对象与顺序无关，则称之为组合问题.

定义排列： 从 n 个不同的元素中，有次序地选取 r 个元素，称为从 n 中取 r 个的排列，其排列数记为 $A\left(n,r\right)=A_n^r$. 当 $r=n$ 时，称此排列为全排列.

定理： 对于满足 $r\le n$ 的正整数 n 和 r ，有 $A(n,r)=A_n^r=n(n-1)\ldots(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$,

其中 $n!=n\times(n-1)\times\ldots\times1$.

定义组合： 从 n 个不同元素中选取 r 个元素而不考虑其次序时，称为从 n 中取 r 个的组合，其组合数记为 $C\left(n,r\right)=C_n^r=\dbinom{n}{r}$.

例题 1：用 2，4，6 三个数字来构造六位数，但是不允许有两个连着的 2 出现在六位数中（例如 626442 是允许的，226426 就不允许），问这样的六位数共有多少个？

例题 2：设 s 是所有满足下列条件的有理数 r 的集合：

（1）$0<r<1$；

（2）$r=0.abcabcabc...=0.\dot{a}b\dot{c}$，其中 a,b,c 不一定互异.

问当将 s 中的数 r 写成最简分数时，共有多少个不同的分子？

例题 3：在 $\left[\frac{1^2}{2006}\right]$，$\left[\frac{2^2}{2006}\right]$，$\left[\frac{3^2}{2006}\right]$，…，$\left[\frac{2006^2}{2006}\right]$ 中，有多少个不同的整数?（其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

例题 4：对于 $0\le x\le 100$，求函数 $f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5}{3}x\right]+[3x]+[4x]$ 所取的不同整数值的个数.

例题 5：设 $S=\{1,2,...,1990\}$，如果 S 的一个 31 元子集中的所有数之和是 5 的倍数，则称为“好子集”. 求 S 的所有好子集的个数.

例题 6：若 X 是一个有限集，$|X|$ 表示集合 X 中的元素的个数，S,T 是 $\{1,2,...,n\}$ 的子集，如果对每一个 $s\in S, s>|T|$，且对每一个 $t\in T, t>|S|$，就称有序对 (S,T) 是“允许的”. 问集合 $\{1,2,...,10\}$ 有多少个“允许的”有序子集对？并证明你的结论.

例题 7：设 P 是一个奇素数，考察集合 $\{1,2,...,2p\}$ 的满足下列两个条件的子集 A：

(1) $|A|=p$； (2) A 中所有元素之和可被 p 整除，试求所有这样的子集 A 的个数.

例题 8：设集合 $A=\{1,2,3,...,366\}$. 如果 A 的一个二元子集 $B=\{a,b\}$ 满足 $17\mid(a+b)$，则称 B 具有性质 P.

（1）求 A 的具有性质 P 的所有二元子集的个数；

（2）求 A 的两两不交的具有性质 P 的二元子集个数的最大值.

例题 9：经理将要打印的信件交给秘书，每次给一封，且放在信封的最上面，秘书一有空就从最上面拿一封信来打，有一天共有 **9** 封信要打，经理按第 **1** 封，第 **2** 封，**...**，第 **9** 封的顺序交给秘书，午饭时，秘书告诉同事，已把第 **8** 封信打印好了，但未透露上午工作的其他情况，这个同事很想知道按什么顺序来打印，根据以上信息，下午打印的信的顺序有多少种可能？（没有要打的信也是一种可能.）

例题 10：设 M 是平面上所有整点的集合，M 中的点 $\{P_0,P_1,...,P_n\}$ 构成的一条折线满足 $P_{i-1}P_i=1,i=1,2,...,n$，则称这条折线长度为 n．$F(n)$ 表示起点 P_0 在原点而终点 P_n 在 x 轴上的长度为 n 的不同折线的条数，求证 $F(n)=C_{2n}^n$．

例题 11：求整数 $1,2,\cdots,10$ 的不同排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{10})$ 的数目，使得 $a_i>a_{2i}(1\leqslant i\leqslant 5)$，$a_i>a_{2i+1}(1\leqslant i\leqslant 4)$．

通过构造母函数求解

通过构造母函数将 $\sum\limits_{A\in X^*}f(A)$ **转化为某个函数** $f(x)$ **在某点** x_0 **处的函数值** $f(x_0)$**．其步骤是：**

数值和—（配 x **）—构造函数—（公式+法则）—简化函数式—（代点）—函数值（答案）**

例如： $\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i x^i\,|_{x=1}=(1+x)^n\,|_{x=1}=2^n$ **.一般地，** $\sum\limits_{k=}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k x^{p_k}\,|_{x=1}=f(x)|_{x=1}=f(1)$**.**

例题 12：设 $X_n=\{1,2,...,n\}$**，对** X_n **的任何非空子集** A **,令** $T(A)$ **是** A **中所有数之积，求** $\sum\limits_{A\subseteq X_n}T(A)$

通过考察某值在和式中出现的次数求解

通过考察某些值在和式中出现的次数，将组合求和转化为通常的求和问题解决.

设 $X=\{a_1,a_2,...,a_n\}$**，对于** X **的子集** $A=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t}\}$**，函数** $f(A)$ **通常是关于** $a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t}$ **的代数式，即** $f(A)=g(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t})$**．此时和式** $\sum\limits_{A\in X}f(A)=\sum\limits_{\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t}\}\subseteq X}g(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t})$**．同时考察每个元素** $a_i(i=1,2,...,n)$ **对应的值** $g(a_i)$ **在和式** $\sum\limits_{\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t}\}\subseteq X}g(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t})$ **出现的次数** t_i**，由此得** $\sum\limits_{\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t}\}\subseteq X}g(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_t})=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i g(a_i)$**.**

例题 13：设 $X_n=\{1,2,...,n\}$，求 $\sum\limits_{A\subseteq X_n} S(A)$,其中 $S(A)$ 表示 A 中所有元素得和，$S(\varnothing)=0$.

例题 14：设 $a_1,a_2,...,a_n$ 是 $1,2,...,n$ 得一个排列，对排列中的数 a_i，如果满足：或者 $i=n$，或者对一切 $j(i<j\le n)$ 有 $a_i>a_j$，则称 a_i 是此排列的一个“大数”，设排列 $\sigma=(a_1,a_2,...,a_n)$ 中大数的个数为 $r(\sigma)$，求 $S=\sum\limits_{\sigma} r(\sigma)$.

通过分类求解

在和式 $\sum\limits_{A\in X} f(A)$ 中 $f(A)$ 的值通常只有有限种可能，从而，可对 $f(A)$ 的值进行分类. 假设 $f(A)$ 共有 t 种不同的取值 $k_1,k_2,...,k_t$，对每一个 $i(1\le i\le t)$，若能求出使 $f(A)=k_i$ 的集合 A 的个数 p_i（即 k_i 出现的次数），则和式 $\sum\limits_{A\in X} f(A)$ 变成 $\sum\limits_{i=1}^{t} p_i k_i$.

例题 15：设 $X_n=\{1,2,...,n\}$ 对 X_n 的任一子集 A,记 $t(A)$ 为 A 中的最小元素，求 $\sum\limits_{A\subseteq X_n} T(A)$.

例题 16：设 A 是 $X_n=\{1,2,...,n\}$ 的任意一个排列，定义 $f(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}|i-A(i)|$，其中 $A(i)$ 为排列 A 的第 i 个位置上的数，求证：$\sum\limits_{A} f(A)=\frac{1}{3}n!(n^2-1)$.

例题 17：对 $X_n=\{1,2,...,n\}$ 的任意一子集 A，记 $S(A)$ 表示 A 中所有元素得和，$S(\varnothing)=0$.

示 A 中的元素个数记 $|A|$，求 $\sum\limits_{A\subseteq X_n}\frac{S(A)}{|A|}$.

通过配对求解

通过配对求解就是将和式中的项两两配对，使每对中两项的和为常数，记为 p，则 $\sum\limits_{A\subseteq X} f(A)=\frac{1}{2}\sum\limits_{A\subseteq X}\left[f(A)+f(A')\right]=\frac{1}{2}\sum\limits_{A\subseteq X} p$. 这是一种简洁而有效的求和方法.

例题 18：对 $X_n=\{1,2,...,n\}$ 的任意一个非空子集 A，定义 $f(A)$ 为 A 中的最小元与最大元之和，求 $X_n=\{1,2,...,n\}$ 的所有 $f(A)$ 的平均值.