江苏省数学竞赛夏令营讲义 0709（下）组合问题

编写：李伟

1. 试确定在12×12棋盘中所有能放置的“士”的数目的最大值，使得其中每一个“士”都恰可攻击另外一个“士”(“士”可以攻击和它所在方格有公共点的方格中的棋子）.

2. 将一个 9×9 的方格表的每一个方格都染上一种颜色，最多可以染上多少种颜色，使得每一行与每一列中，都至多有 5 种不同的颜色？

3. 将99×101的方格表中若干个小方格涂黑，其余方格为白色. 要使得每个黑格至多和一个黑格相邻，最多能涂黑多少个小方格？（注：两个方格有公共边称为相邻）

本题为 2015 年北京大学中学生数学奖个人能力挑战赛第 3 题

4. 假定国际象棋中的马每走一步，可在水平方向移动n个方格而在竖直方向移动一个方格（或者在水平方向 1 格而竖直方向n格）. 现在有一只马位于无限大的国际象棋棋盘的一个方格中，试问对这样的自然数n，马可以走到任何指定的方格之中，而对怎样的自然数n则无法做到？

5. 整数列 $a_{i,j}$，其中 $a_{1,n}=n^n\left(n\geq 1\right)$，$a_{i,j}=a_{i-1,j}+a_{i-1,j+1}\left(i,j\geq 1\right)$. 试求 $a_{128,1}$ 所取值的个位（十进制数）.

6. **（2018 江苏预赛）**从 $1,2,3,\ldots,2050$ 这 2050 个数中任取 2018 个组成集合 A，把 A 中的每个数染上红色或蓝色. 求证：总存在一种染色方法，使得 600 个红数及 600 个蓝数满足下列两个条件：

①这 600 个红数的和等于这 600 个蓝数的和；

②这 600 个红数的平方和等于这 600 个蓝数的平方和.

7. 已知整数 $a,b\in\left\{0,1,2,\ldots,80\right\}$，若独立随机地选取 a,b，试问二项式系数 $\binom{a}{b}$ 除以 3 所得余数的期望.（其中 $\binom{0}{0}=1,\binom{a}{b}=0\left(a<b\right)$）

8. 证明：

(1) 对于每个正整数 n，存在唯一确定的正整数 x_n,y_n 满足 $\left(1+\sqrt{33}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{33}$;

(2) 若 x_n,y_n 如上定义，p 为质数，则 y_{p-1},y_p,y_{p+1} 中至少有一个是 p 的倍数

9. 一只蚂蚁从多面体的一个顶点爬向另一个顶点. 如果蚂蚁只能沿着多面体的棱爬行，并且在爬行过程中恰好经过多面体每条棱各一次，那么多面体的棱数、顶点数以及面数之和最少是多少？

10. 将边长为正整数 m、n 的矩形划分成若干边长为正整数的正方形, 每个正方形的边均平行于矩形的相应边, 试求这些正方形边长之和的最小值?

11. 汤姆要将由 N 块木块围成的圆形栅栏刷成白色，他按以下原则顺时针上色：先给第一块木条上色，再给间隔一块木条后的那块上色，然后给间隔两块木条后的那块上色，每次上色的间隔数比上一次多一(某些木条可能被刷了几次)，如此下去，汤姆相信迟早会将所有的木条刷成白色．但杰瑞认为最终存在某些木条没被上色 ．证明：若 N 为 2 的幂,则汤姆是正确的，否则杰瑞是正确的.

12. 设 $n\left(n>3\right)$ 是整数，在一次会议上有 n 位数学家，每一对数学家只能用会议规定的 n 种办公语言之一进行交流，对于任意三种不同的办公语言，均存在三位数学家用这三种语言互相交流．求所有可能的 n，并证明你的结论．

13. 设 n 为正整数．有一个由一些人组成的集合，若该集合中的任意三个人中均至少存在两个人互相认识，而任意 n 个人中均存在两个人互相不认识，则称该集合为“n 平衡的”．证明：n 平衡的集合中最多有 $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ 个人．

14. 在一个班里，有 $n(n \geqslant 4)$ 名同学．在这个班里任何 $n-1$ 名学生可以排成一圈，使得这个圈上相邻的两个人是朋友，但所有 n 名学生不能组成类似的圈．求 n 的最小值．

15. 已知一个 $10\times10\times10$ 的立方体格，甲、乙、丙三人按如下规则做游戏，他们以（甲、乙、丙；甲、乙、丙；…）的次序轮流进行，分别从三个不同的方向将 $1\times1\times10$ 砖形物放进立方体格内，每个人有一个方向，且他必须将砖形物总以这个方向放置．砖形物应该全部放入已知的立方体格内，可以想邻，但不能重叠．问：这种游戏最多能进行多少轮？