

基本不等式

几个重要不等式介绍:

1. 平均不等式: 若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 为正实数, 且 $n > 1$, 定义如下四个平均值:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \text{ (算术平均数)}, G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \text{ (几何平均数)},$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \text{ (平方平均数)}, H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \text{ (调和平均数)}.$$

四个平均数有如下关系: $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ 时取等号.

2. 柯西不等式: 已知 $a_i, b_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 均为非零实数,

$$\text{则 } (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 时, 不等式中等号成立.

$$\text{常见推论: (1) } n \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (2) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} \right)^2 \quad (a_i, b_i \geq 0)$$

3. 排序不等式: 设 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 及 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, 则

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \text{ (同序和)} \geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \text{ (乱序和)}$$

$$\geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \text{ (逆序和)} \quad \text{其中 } j_1 j_2 \dots j_n \text{ 是 } 1, 2, 3, \dots, n \text{ 的任一排列, 当且仅当}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ 或 } b_1 = b_2 = \dots = b_n \text{ 时等号成立.}$$

4. 切比雪夫不等式: 若 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, 则:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

5. 琴生不等式: 若 $f(x)$ 是下凸函数, 则对其定义域中的任意 n 个点 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)], \text{ 当且仅当 } x_1 = x_2 = \dots = x_n \text{ 等号成立.}$$

例题选讲

1. 设 x, y, z 为实数, A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三内角,

求证: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2xz \cos B + 2xy \cos C$.

2. 已知 $x, y, z \in \mathbf{R}, x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求 xyz 的最值.

3. 已知 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq 64$, 求 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_5}{a_6}$ 的最小值.

4. 设 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

5. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

6. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}^+$, 且 $abcd=1$. 求证: $\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$.

7. 确定最小正整数 k , 使得对任意的 $a \in [0, 1]$ 及任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 有 $a^k(1-a)^n < \frac{1}{(n+1)^3}$.

8. 正实数 x, y, z 满足 $9xyz + xy + yz + zx = 4$, 求证: (1) $xy + yz + zx \geq \frac{4}{3}$; (2) $x + y + z \geq 2$.

9. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 证明:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

10. 已知 $a_{ij} > 0, (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_{i2}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^n a_{im}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt[m]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}\right)^m$$

11. 已知 $a_i, b_i > 0$, 求证:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq (m+1) \sum_{i=1}^n a_i - m \sum_{i=1}^n b_i \quad (2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^m}$$

12. (1) 设三个正实数 a, b, c 满足 $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$, 求证: a, b, c 一定是某个三角形的三边.

(2) 设 $n(n \geq 3)$ 个正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足: $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4)$.
求证: 这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

13. 设 a, b 是正实数, 且 $ab = 1$. 求证: $(a + 2b + \frac{2}{a+1})(b + 2a + \frac{2}{b+1}) \geq 16$.

14. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{z^2 - x^2}{x + y} + \frac{x^2 - y^2}{y + z} + \frac{y^2 - z^2}{z + x} \geq 0$.

15. 正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 证明: $\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2$.

16. 设 a, b, c, d 为正实数, 且 $a + b + c + d = 4$. 证明: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4 + (a - b)^2$.

17. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 为正数, 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, 求证:

$$(1) \left(1 + \frac{1}{a_1^2}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{a_3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n^2}\right) \geq (1 + n^2)^n.$$

$$(2) \frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

18. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = S$ 的正实数. 求证:

$$\frac{a_1^3}{a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2^3}{a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{S}{n-1}$$

19. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in [1, 2]$, 且 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2$.

20. 设 $a, b, c, d \in [1, 3]$, 且 $a + b = c + d$. 求证: $a + b \leq \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} \leq \frac{7}{3}(a + b)$.

21. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ 且 $abc = 1$. 求证: $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$.

22. 设 a, b, c 是正实数, 且 $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$, 求证: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 12$.

23. 已知 a, b, c 是满足 $a + b + c = 1$ 的非负数, 证明: $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{a^2 + a + 1} + \frac{b}{b^2 + b + 1} + \frac{c}{c^2 + c + 1} \leq \frac{9}{13}$.